BIBLIOTECA JUVENIL ILUSTRADA

José Antonio de la Peña

Matemáticas y la vida cotidiana

LIBROS DEL RINCÓN SEP

Biblioteca Juvenil Ilustrada

José Antonio de la Peña

Matemáticas y la vida cotidiana

Santillana

Libros del Rincón

Secretaría de Educación Pública | SEP

Sistema de clasificación Melvil Dewey DGMyME

510.7
P3
2002 Peña, José Antonio de la
Matemáticas y vida cotidiana / José Antonio de la Peña; ilus. Daniel Arreola Celis *et al.* – México : SEP : Santillana, 2002.
64 p. : il. – (Libros del Rincón)

ISBN: 970-18-9812-5 SEP (obra completa)
ISBN: 970-18-9857-5 SEP

1. Matemáticas – Estudio y enseñanza. I. Arreola Celis, Daniel, il. II. t. III. Ser.

Dirección editorial: Antonio Moreno Paniagua
Producción editorial: Diagrama Casa Editorial, S.C.

© José Antonio de la Peña, 2002

Primera edición SEP / Editorial Santillana, 2002

D.R. © Editorial Santillana, S.A. de C.V., 2002
Av. Universidad 767, col. Del Valle,
03100, México, D.F.

D.R. © Secretaría de Educación Pública, 2002
Argentina 28, Centro,
06020, México, D.F.

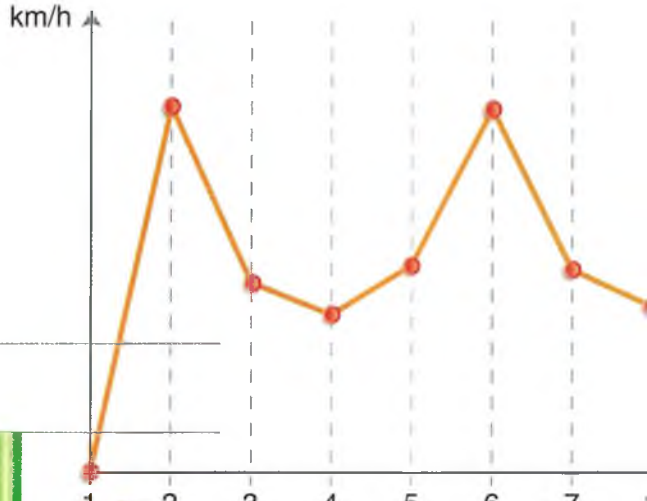
ISBN: 970-29-0029-8 Editorial Santillana (obra completa)
ISBN: 970-29-0297-5 Editorial Santillana
ISBN: 970-18-9812-5 SEP (obra completa)
ISBN: 970-18-9857-5 SEP

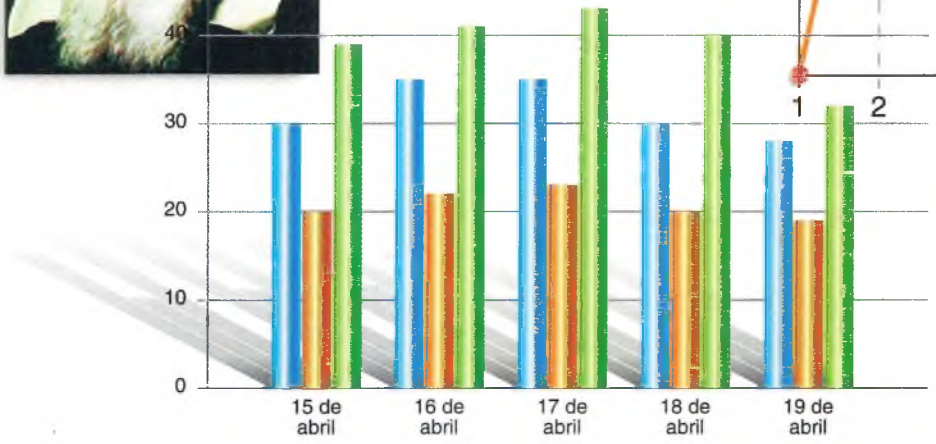
Prohibida su reproducción por cualquier medio mecánico
o electrónico sin la autorización de los coeditores.

Impreso en México

Contenido

Presentación	5
Las matemáticas son útiles	6
El mapa de la ciudad	8
Midiendo la Tierra	10
Mapas de la Tierra	12
La velocidad del coche	14
¿Cuántas canicas tuve en promedio en la semana?	16
La gráfica de velocidades	18
Mi tabla de crecimiento	20
Las temperaturas en México	22
Las matemáticas y la vida humana	24
¿Qué es la estadística?	26
Fenómenos regidos por el azar	28
Teoría de las probabilidades	30
Contando con cuidado	32
¿Cuándo lloverá?	34
El problema de Pascal	36
Chicles de colores y cumpleaños	38
La falacia del jugador	40
La tasa de crecimiento del país	42
Distribución de los resultados	44
Cómo medir la antigüedad de las cosas	46
Matemáticas y los juegos	48
Mensajes secretos	50
Las matemáticas en la computación	52
Matemáticas en la ciencia	54
Las matemáticas en México	56
¿Para qué me sirven las matemáticas?	58
Grandes matemáticos	60
Índice analítico	62


km/h
1
2
3
4
5
6
7


50
40
30
20
10
0
15 de abril
16 de abril
17 de abril
18 de abril
19 de abril

BUSCH
5
-BUSCH
GOODYEAR
ART PEPIN Sports

BUSCH
5
-BUSCH
GOODYEAR
ART PEPIN Sports

Presentación

La Biblioteca Juvenil Ilustrada presenta en este volumen 27 temas que explican en forma clara y precisa algunas aplicaciones de las matemáticas en la vida cotidiana, así como su uso en distintas áreas de investigación científica.

El objetivo de la Biblioteca Juvenil Ilustrada es poner en manos de todos los jóvenes libros que despierten su interés en las materias más variadas, desde matemáticas y química hasta gramática y literatura, desde las leyes del universo hasta los problemas más cotidianos. Libros que los hagan pensar y entusiasmarse, que los ayuden a estudiar y a resolver sus dudas.

Para llevar a cabo este proyecto hemos reunido a más de 60 autores, todos ellos reconocidos especialistas en sus áreas de estudio e investigación, divulgadores deseosos de contagiar su entusiasmo y llevar de la mano a los estudiantes por un camino lleno de sorpresas.

La Biblioteca Juvenil Ilustrada es una visión fantástica de la ciencia, la literatura y el pensamiento mexicanos escrita por quienes día a día investigan en laboratorios o imparten clases en escuelas y universidades.

Esperamos que la Biblioteca Juvenil Ilustrada contribuya a que los estudiantes se familiaricen con las distintas áreas del conocimiento y lleguen a decir "si así es la química —o la historia o la literatura—, yo quiero dedicarme a eso en el futuro".

Los editores

Las matemáticas son útiles

Cuando vemos alrededor de nosotros, podemos descubrir la presencia de las matemáticas. Las encontramos en las cosas más simples y cotidianas: al ver la hora en el reloj, al contar el número de calles hasta la escuela, al calcular cuánto tenemos que pagar en la tienda, en el velocímetro del coche, etcétera. Asimismo, las matemáticas nos ayudan a entender cómo funciona el teléfono, la televisión, los aviones, las computadoras y los satélites espaciales. Las matemáticas han sido utilizadas a lo largo de los siglos en el arte, la arquitectura y en muchas ciencias como la física, la química y la biología.

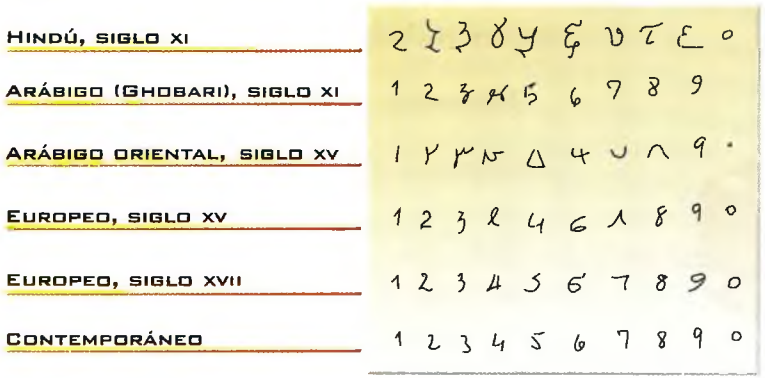
Las primeras trazas de las matemáticas en la vida del hombre se encuentran registradas en las cuevas prehistóricas. Muchas pinturas rupestres no son sino registro de las cosas que eran importantes para el hombre primitivo: sus compañeros, los animales, el paso del tiempo...

Poco a poco el hombre fue inventando mejores maneras de llevar el registro de las cosas y para ello inventó los números y los símbolos para escribirlos. Los símbolos con que denotamos los números tienen una larga y complicada historia.

Los números arábigos

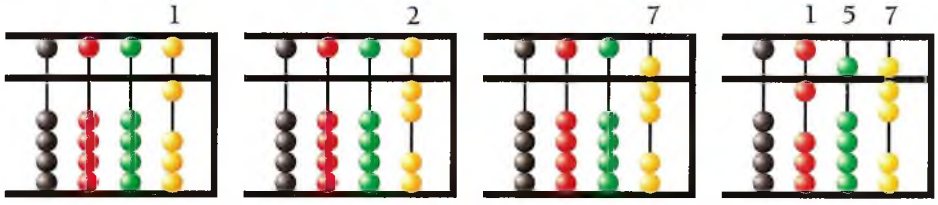
Los números que nosotros usamos se llaman arábigos y comenzaron a ser usados en la India hace aproximadamente mil años. A lo largo de ese tiempo los símbolos de los números se han modificado poco a poco hasta tomar su actual apariencia.

El uso más elemental que se da a los números es contar. También se hacen operaciones con ellos: sumar, restar, multiplicar, dividir y otras operaciones más complejas.



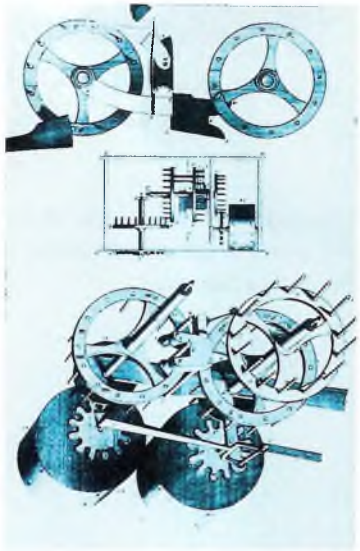
Máquinas para calcular

Desde los tiempos remotos se han tratado de diseñar aparatos que simplifiquen y hagan más rápidas las "cuentas" aritméticas. Tal vez el aparato más antiguo es el ábaco, un invento simple y eficiente que todavía se usa en muchos países. Aparentemente fue inventado en Babilonia hace más de 5 000 años, pero fueron los chinos quienes lo llevaron a la forma en que se usa actualmente.



Distintas sumas con ábaco.

En el siglo XVII, John Napier construyó una calculadora para multiplicar. Posteriormente, Blaise Pascal construyó una máquina que permitía sumar y restar mecánicamente. Ciertamente, el tamaño de estas máquinas era mucho mayor que el de nuestras modernas calculadoras de bolsillo. En los últimos 50 años del siglo XX las máquinas para calcular tuvieron una rápida evolución hasta llegar a las potentes computadoras modernas.



La máquina calculadora de Pascal.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
números arábigos contemporáneos

El hombre pronto encontró otras aplicaciones a las matemáticas: medir terrenos y distancias entre ciudades. Registró estas observaciones en mapas, así nació la cartografía. Registró también el número de habitantes de las ciudades, los niños que nacían y las personas que fallecían, de allí nació la estadística.

A lo largo de este libro estudiaremos algunas aplicaciones fundamentales de las matemáticas: el trazado de mapas, la medición de velocidades, el registro de fenómenos naturales. Estudiaremos nociones básicas de probabilidad y estadística y veremos algunas de sus sorprendentes aplicaciones en problemas del mundo que nos rodea.

El mapa de la ciudad

Para representar de manera clara las calles de una ciudad se hacen mapas. Para que se puedan leer convenientemente las distancias entre los lugares, los mapas de una ciudad se presentan a escala. Para ubicar lugares a partir de un origen se usa también el plano coordenado. Las guías de las calles de la ciudad son planos coordenados a diferentes escalas.

El matemático francés René Descartes, uno de los iniciadores de las matemáticas modernas, introdujo el plano coordenado, también llamado cartesiano. En una hoja de papel cuadriculado se construye el plano coordenado de la siguiente manera: se indica un punto, llamado origen, a partir del cual se miden las distancias a los otros puntos del plano. Desde el origen se trazan dos ejes coordenados. El eje coordenado horizontal indica la distancia hacia el este desde el origen, y el eje coordenado vertical indica la distancia hacia el norte desde el origen. Cualquier punto en el mapa se puede identificar por medio de dos números: la distancia desde el origen hasta el punto hacia el este y desde el origen hasta el punto hacia el norte.

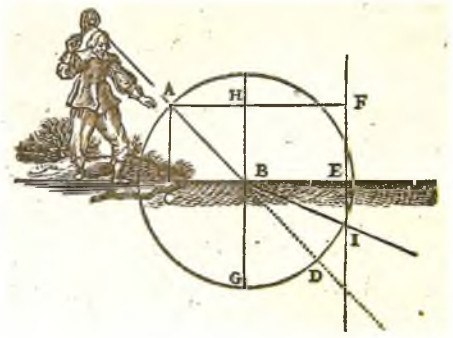


Ilustración de la primera edición del *Discurso del método*, París, Biblioteca Nacional.

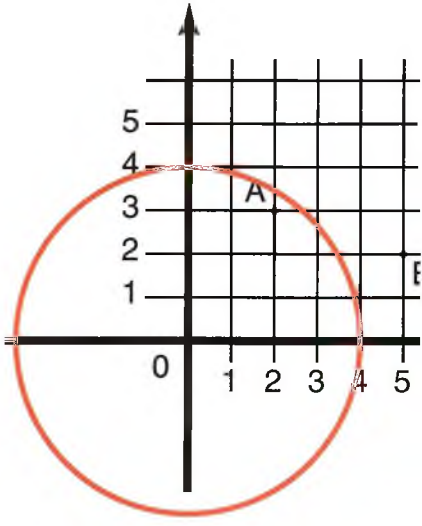
En el plano coordenado localizamos los puntos de coordenadas (2, 3) y (5, 2), en la figura, A y B, respectivamente. Los puntos sobre la circunferencia con centro en el origen y radio 4 son todos los puntos con coordenadas (x, y) que satisfacen la ecuación

$$x^2 + y^2 = 4^2$$

como lo son los puntos (4, 0), (0, 4), (1, 3.87), (3.87, 1) y muchos otros. La distancia entre dos puntos en el plano coordenado puede medirse fácilmente: si (x_1, y_1) y (x_2, y_2) son dos puntos en el plano, la distancia d entre ellos es:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Por ejemplo, entre (2, 3) y (5, 2)
la distancia es $\sqrt{(5-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{9+1} = 3.16$



La Guía Roji

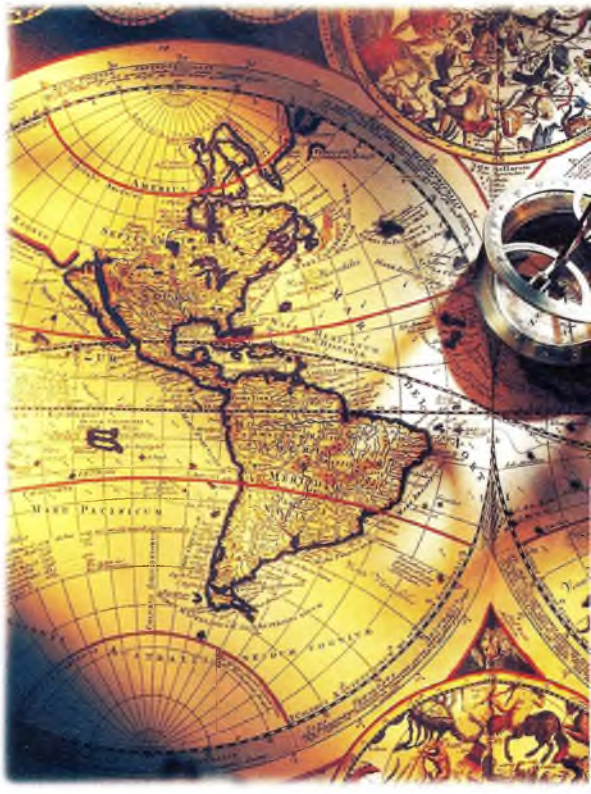
Seguramente conoces guías de las calles de tu ciudad. La mayoría de ellas usa el principio del plano coordenado, pero divide la ciudad en pequeños sectores para obtener mayor precisión. Estas guías están hechas a escala, es decir, la razón de las distancias entre dos puntos en el mapa es la misma que la razón entre esos puntos en la realidad. Si la indicación es que la escala es 1:m, entonces cada centímetro en el mapa representa *m* centímetros de la realidad. Algunas veces la escala está señalada por medio de una reglilla al pie del mapa.

Las guías de las calles de la ciudad son planos coordenados a diferentes escalas.

En la Ciudad de México, la guía más usada es la *Guía Roji*. Si quieres encontrar una calle de la ciudad, debes buscar en el índice el número de mapa en que se encuentra la calle. Como en ocasiones hay muchas calles con el mismo nombre, tal vez debas saber la colonia donde está la calle buscada. Por ejemplo, si buscamos la calle Dr. Liceaga de la colonia Doctores, encontramos que se encuentra en el mapa 84. Pero este mapa es todavía muy complicado y tardarías mucho en encontrar la calle que buscas. Por ello el mapa está cuadriculado y en el índice te dan dos coordenadas: A6, por ejemplo. Esto te indica que debes buscar en el pequeño cuadro con estas coordenadas para encontrar la calle que buscas.

Midiendo la Tierra

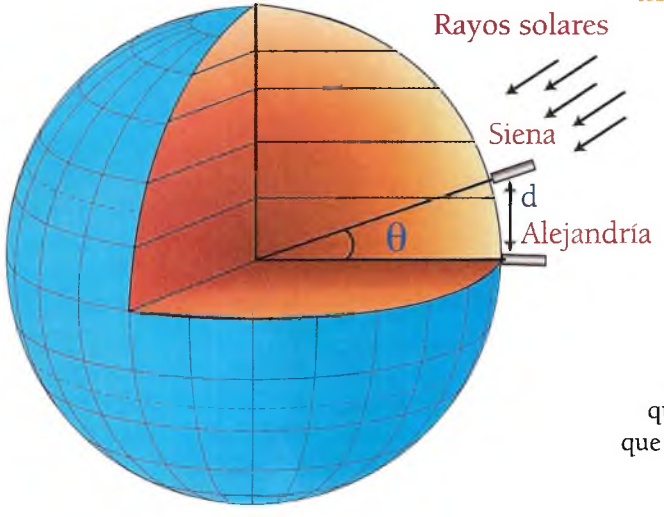
Desde tiempos remotos el hombre intentó medir la Tierra y hacer mapas que representaran fielmente el mundo que conocía. La historia de las mediciones de la Tierra y la creación de los primeros mapas están ligadas a las grandes aventuras de exploración del mundo.



Los primeros mapas, que incluían las costas de varios continentes, se deben a un pueblo de grandes navegantes: los fenicios. Años después, los sabios griegos del siglo v antes de nuestra era tenían ya una idea clara de que la Tierra era una esfera. Idearon ingeniosos métodos para medir el tamaño de la esfera y crearon los primeros mapas que incluían gran parte de los continentes que hoy conocemos como Europa, Asia y África.

d = conocida

Eratóstenes y la medición del radio de la Tierra



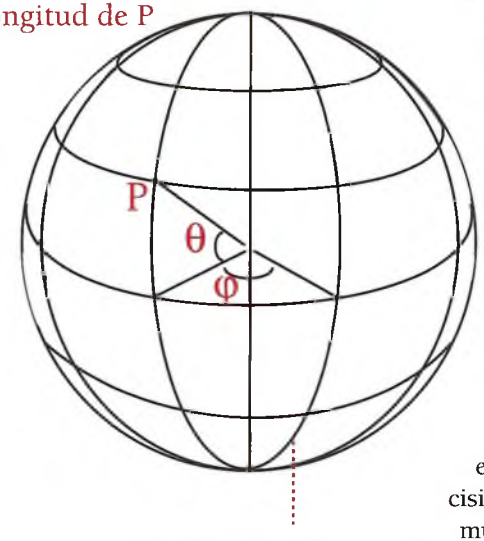
Eratóstenes era un sabio griego que vivió en el año 300 antes de nuestra era. Él sabía que la Tierra era una esfera, pero se dio a la tarea de medir el tamaño de dicha esfera. En las ciudades de Siena y Alejandría a la misma hora del día midió el tamaño de las sombras de paredes de la misma altura. Conocía además la distancia entre Siena y Alejandría. Con esta información y el uso de un poco de trigonometría, que es la parte de las matemáticas que estudia los ángulos, obtuvo una estimación del valor del radio de la Tierra.

La estimación de Eratóstenes era bastante exacta. Hoy se sabe que la Tierra es una esfera ligeramente achatada en los polos y que su radio es de aproximadamente 25 400 km.

Los grandes viajes de exploración, como los de Vasco da Gama y de Cristóbal Colón, pero sobre todo el viaje de circunnavegación de Américo Vespucio y Sebastián Elcano, demostraron la redondez de la Tierra y dieron noticia de la existencia de tierras diferentes a las conocidas hasta entonces. En estos viajes la determinación de la posición de los navegantes en medio del océano se hacía por medio de instrumentos como la brújula, el sextante y también por la observación de las estrellas. Pero era común que los barcos anduvieran extraviados semanas enteras, pues no era asunto fácil ubicar la posición.

Vespucio estudiando la redondez de la Tierra.

θ = latitud de P
φ = longitud de P



Meridiano de Greenwich

El problema de la longitud

Desde los viejos mapas de Eratóstenes, la Tierra era dividida en círculos de dos tipos: los que eran paralelos al ecuador (paralelos) y los círculos que pasaban por los polos (meridianos). El ángulo que se forma entre el ecuador y un paralelo determina la latitud de un lugar sobre la superficie de la Tierra. El ángulo que se forma entre un meridiano de referencia y el meridiano que pasa por un lugar de la superficie de la Tierra se llama la longitud del lugar.

Medir la latitud de un lugar, aun en medio del océano, es sencillo, y los grandes navegantes europeos del siglo XV y XVI lo podían hacer con precisión. Medir la longitud de un lugar era una tarea mucho más difícil.

En 1714 la Corona de Inglaterra ofreció un importante premio a la persona que pudiera resolver el problema de determinar la longitud de los diferentes lugares. Se hicieron muchos intentos, pero la solución sólo llegó más de 40 años después. John Harrison construyó los primeros relojes que se mantenían funcionando por días enteros. Con ayuda de éstos se pudo fijar la longitud de los lugares sobre la Tierra. Desgraciadamente, el premio nunca le fue entregado.

Desde 1884 se usa el meridiano que pasa por la ciudad inglesa de Greenwich como el meridiano de referencia (o sea, el meridiano 0°) para medir longitudes.

Mapas de la Tierra

La cartografía, como la ciencia de representación de la Tierra en mapas planos, fue evolucionando a lo largo de los siglos. Sólo después del Renacimiento y del uso de la geometría proyectiva de los pintores se ideó efectuar distintos tipos de proyecciones geométricas para obtener mapas de la Tierra.

Mapa antiguo d

El problema de representar lo que tenemos en la superficie de un globo en una hoja plana de papel no es sencillo. Al desdoblar la superficie de un globo lo rompemos y desfiguramos.

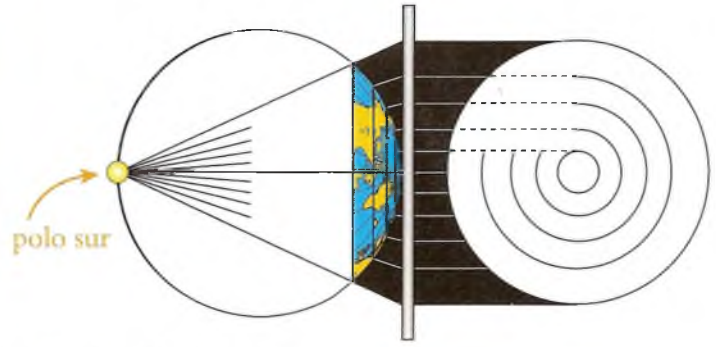
La proyección en el arte del Renacimiento

En el siglo XV, algunos pintores renacentistas, como Piero de la Francesca y Alberto Durero, se dieron cuenta de la importancia de la geometría para alcanzar una representación realista de los objetos y paisajes que querían plasmar en sus cuadros. Por ello introducen la idea de la perspectiva. Las líneas de sus cuadros al acercarse hacia el horizonte convergen en el punto de fuga. Esto es lo que sucede si te paras en el centro de una avenida larga: verás cómo la calle parece estrecharse conforme se aleja y las aceras se tocan en un punto lejano. Éste es el principio de proyección al punto de fuga.

Natividad de Alberto Durero.

Mercator.

El primer mapa de la Tierra hecho por medio de proyecciones fue el del cartógrafo holandés Mercator, realizado en 1569. La proyección de Mercator era bastante complicada y no fue sino hasta 30 años después que el matemático inglés Edward Wright explicó completamente los detalles de su elaboración. Hoy el mapa de Mercator sigue siendo muy popular.



Proyección estereográfica.

Proyecciones de la Tierra

Hay proyecciones más sencillas que la de Mercator, que nos permiten construir buenos mapas de la Tierra.

La proyección estereográfica se obtiene por medio de la iluminación de un globo terráqueo desde el polo sur de la Tierra. Los rayos de luz pasan a través del globo y marcan los puntos de la Tierra sobre un plano tangente al polo norte.

La proyección cilíndrica se obtiene imaginando que a lo largo del eje terrestre que une a los polos tenemos una luz de neón. Enrollamos el globo terráqueo por medio de un cilindro que toca la Tierra a lo largo del ecuador. Los rayos de luz pasan a través del globo y marcan los puntos de la Tierra en el cilindro. Si desenrollamos el cilindro obtenemos un buen mapa de la Tierra, también conocido como mapamundi.

Proyección cilíndrica.

Para la construcción de estos mapas es necesario un conocimiento elemental de trigonometría y del uso de planos coordenados.

Los mapas de la Tierra tienen diversos usos; unos son mejores que otros de acuerdo con diferentes puntos de vista. La enorme ventaja que tiene el mapa de Mercator y que lo hizo rápidamente popular entre los navegantes es la siguiente: si un barco se mueve sin cambiar el rumbo, tal como lo indicaría una brújula, entonces la trayectoria del barco sobre el mapa es una línea recta. Asimismo, el mapa que resulta de la proyección estereográfica es muy preciso en lugares cercanos al polo norte.

La velocidad del coche

Cuando vas en un coche, puedes ver la velocidad en los instrumentos del tablero. La velocidad no es siempre constante, cambia cuando se frena o cuando se presiona el acelerador. ¿Qué información nos proporciona la velocidad? ¿Podemos saber cuál es la distancia recorrida?

Cuando el coche está detenido, por supuesto, tiene velocidad 0. Si no arrancamos el coche, lo empujamos o jalamos con una grúa, el coche no se moverá. En una calle sin tránsito y andando a baja velocidad, el coche puede mantenerse a velocidad constante v, esto es, vemos que la aguja del velocímetro marca todo el tiempo la velocidad v. Si esta velocidad se mantiene durante un intervalo de tiempo t, entonces la distancia d recorrida en ese tiempo por el coche será:

$$d = vt$$

Cuando el coche se mueve a velocidad constante, la velocidad es la distancia recorrida por unidad de tiempo. Por ejemplo, 10 km/h (se lee "diez kilómetros por hora") indica que a velocidad constante el coche recorrería 10 kilómetros cada hora.

Las leyes del movimiento de Newton

Para explicar el movimiento de los planetas y otros cuerpos en el espacio, el matemático y físico inglés Isaac Newton enunció una serie de leyes del movimiento. Uno de los principios básicos indica que un cuerpo en reposo, cuando no está sujeto a ninguna fuerza de sus alrededores, se mantiene en reposo. También un cuerpo que se mueve con velocidad constante y que no está sujeto a fuerza alguna mantiene su movimiento en línea recta y velocidad constante.

Observemos que nuestro coche está sujeto a diversas fuerzas. Por un lado, al acelerar, el motor lo empuja hacia delante. Por otro lado la fricción del piso tiende a frenarlo. Para mantenerlo a velocidad constante, tenemos que equilibrar estas dos fuerzas.

Si el terreno por donde circula el coche no es plano, entonces el coche puede experimentar otras fuerzas; al avanzar por una pendiente inclinada, está sujeto a una fuerza que tiende a llevarlo hacia abajo; dicha fuerza es proporcional al peso del coche.

Cuando la velocidad del coche no es constante, resulta más difícil saber la distancia que el coche recorre. Si medimos el tiempo *t* en el que se mueve y conocemos la distancia *d* que recorrió, decimos entonces que la velocidad media v del coche está dada por:

$$v = d/t$$

Por ejemplo, si de mi casa al sur de la ciudad tardo media hora en llegar al centro y sé que la distancia es de 20 km, entonces el viaje se realizó a una velocidad media de

$$20\ km\ /\ 30\ min = 0.66\ km/min = 40\ km/hr$$

Hay otras situaciones donde el movimiento no tiene velocidad constante, como la caída libre de una piedra. Podemos fácilmente medir, con la ayuda de un cronómetro, cuánto tiempo tarda una piedra pequeña en caer desde los diferentes niveles de un edificio. Veremos que la piedra recorre 5 metros en 1 segundo. Si la piedra cae durante 2 segundos, habrá recorrido entonces 20 metros; si cae durante 3 segundos, entonces recorre 45 metros y si cae 4 segundos habrá recorrido 80 metros. Obviamente, el movimiento de la piedra al caer no tiene velocidad constante, pues si así fuera habría recorrido solamente 10 metros en una caída de 2 segundos. La velocidad media de la piedra está dada de acuerdo con la siguiente tabla.

Tiempo en el aire	Distancia recorrida	Velocidad media
1 seg	5 m	5 m/seg
2 seg	20 m	10 m/seg
3 seg	45 m	15 m/seg
4 seg	80 m	20 m/seg

Como vemos, cada segundo aumenta la velocidad media 5 m/seg. Decimos que este movimiento es uniformemente acelerado. La fuerza que actúa sobre la piedra y hace que su velocidad no sea constante es la fuerza de gravedad. Dicha fuerza se mide como el peso de la piedra.

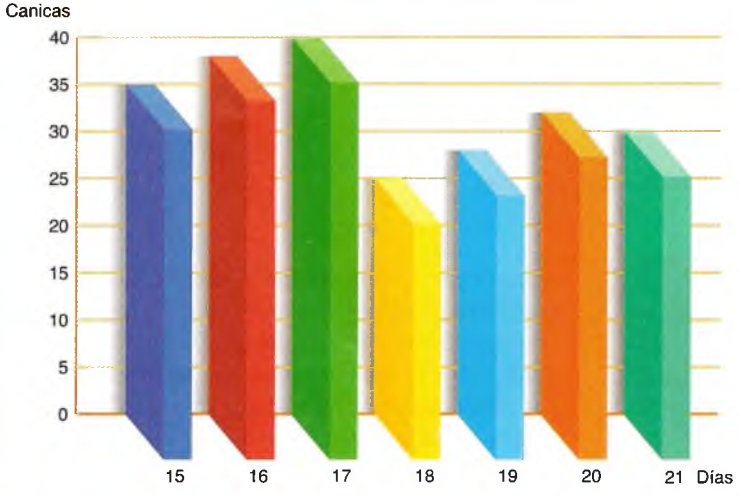
¿Cuántas canicas tuve en promedio en la semana?

En asuntos importantes es conveniente llevar un registro exacto de las posesiones. El banco registra cuánto dinero tiene cada cliente y cuánto dinero deposita o retira del banco cada día. De manera similar, el gerente de la tienda lleva registro de las mercancías que se compran o venden. Probablemente nuestra madre lleva el registro del gasto de la casa. Esta información es de gran utilidad.

A Juan le gusta mucho jugar canicas y lleva registro de cuántas canicas tiene al final del día, todos los días. La tabla de las canicas que hizo Juan la semana que comenzó el 15 de abril se ve como sigue.

Día	Número de canicas
15 de abril	35
16 de abril	38
17 de abril	40
18 de abril	25
19 de abril	28
20 de abril	32
21 de abril	30

La información de la tabla se puede poner de manera más vistosa en una gráfica de barras como la siguiente.



Hubo días en que Juan tuvo muchas canicas, como el 16 y el 17 de abril, en cambio hubo días malos en que sólo tuvo 25 canicas, como el 18 de abril. A Juan le interesa saber cuántas canicas tuvo en promedio a lo largo de la semana. Este número se obtiene sumando el número de canicas de cada día y dividiendo entre el número de días, es decir, entre 7.

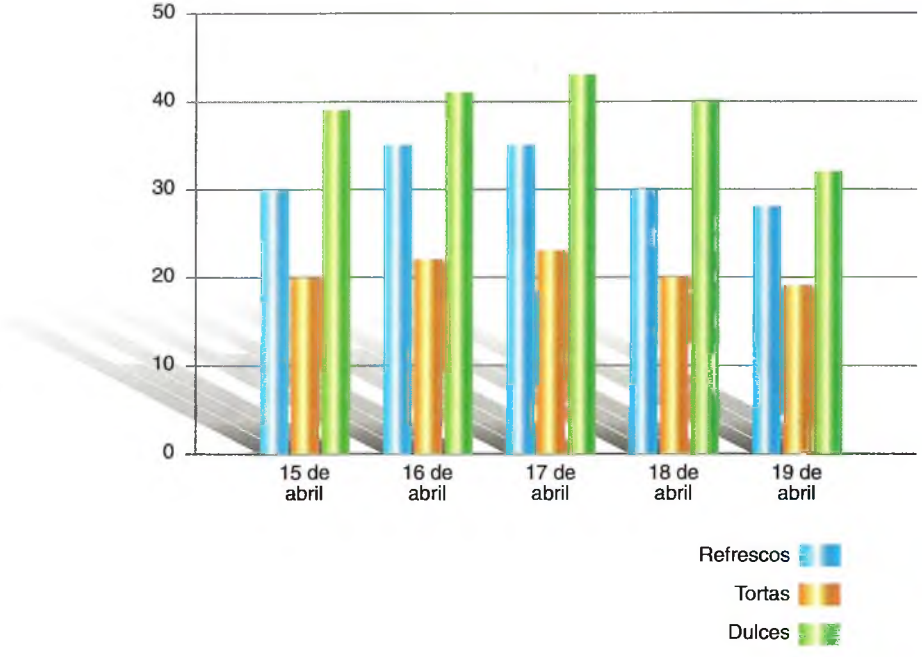
Promedio = (35 + 38 + 40 + 25 + 28 + 32 + 30) / 7 = 32.57 canicas.

¿Qué quiere decir 32.57 canicas? ¡Juan nunca tuvo pedazos de canicas! El promedio no es el número de canicas que tiene Juan en algún momento. Es sólo un número que indica más o menos cuántas canicas tuvo Juan cada día de la semana.

¿Cuánto vende la señora de la tienda?

En la tienda de la escuela se venden refrescos, tortas y dulces. Los refrescos valen 4 pesos, las tortas 6 pesos y los dulces 50 centavos. La señora de la tienda ha hecho su tabla de ventas de la semana:

Día	Refrescos	Tortas	Dulces	Venta
15 de abril	30	20	39	259.50
16 de abril	35	22	41	292.50
17 de abril	35	23	43	299.50
18 de abril	30	20	40	260
19 de abril	28	19	32	242



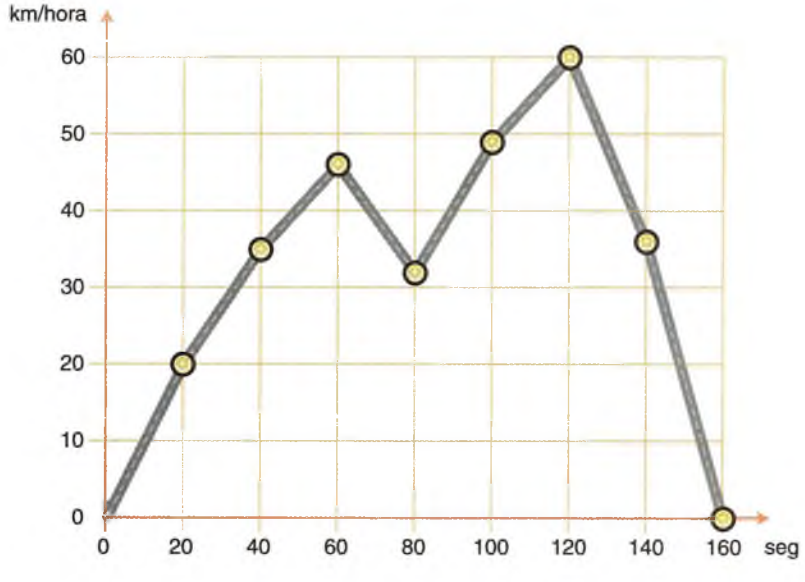
A lo largo de la semana, ¿cuál es el promedio de refrescos vendidos?, ¿cuál es el promedio de tortas vendidas? y ¿cuál es el promedio de venta total de la semana?

La gráfica de velocidades

Cuando vamos en un coche, podemos ir anotando la velocidad que indica el velocímetro. Cuando el conductor acelera, la velocidad sube; cuando el conductor frena, la velocidad baja. Con estos datos podemos trazar la gráfica de velocidades y obtener el promedio de velocidad del coche.

Antes de abordar el coche debemos preparar lápiz y papel y hacer una tabla como la siguiente:

Tiempo	Velocidad km/hora
0 seg	0
20 seg	20
40 seg	35
60 seg	48
80 seg	32
100 seg	49
120 seg	60
140 seg	36
160 seg	0



Observemos que esta gráfica no es de barras. De cada punto conocido en la gráfica, digamos el punto (0, 0), al siguiente punto, digamos el (20, 20), no sabemos realmente cómo varió la velocidad del coche. ¿A los 10 segundos, la velocidad era de 10 km/hora o de 15 km/hora? Pero sabemos que el coche debe haber llegado de 0 km/hora a 20 km/hora pasando por velocidades intermedias. Por ello, lo más sencillo es trazar una línea que una el punto (0, 0) con el punto (20, 20), luego este punto con el punto (40, 35) y así sucesivamente.

8

El promedio de velocidad del coche

Nos informan que un coche viajó durante 40 minutos a una velocidad de 60 km/hora, luego cambió bruscamente su velocidad y durante los siguientes 30 minutos viajó a una velocidad de 80 km/hora. ¿Cuál fue el promedio de velocidad durante la hora y 10 minutos de viaje? ¿Cuántos kilómetros recorrió el coche en ese tiempo?

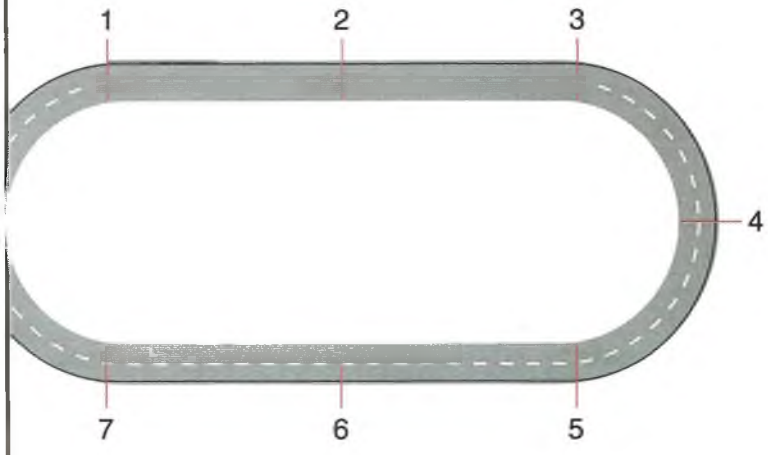
Promedio = ((40 × 60) + (30 × 80)) / 70 = 68.57 km/hora

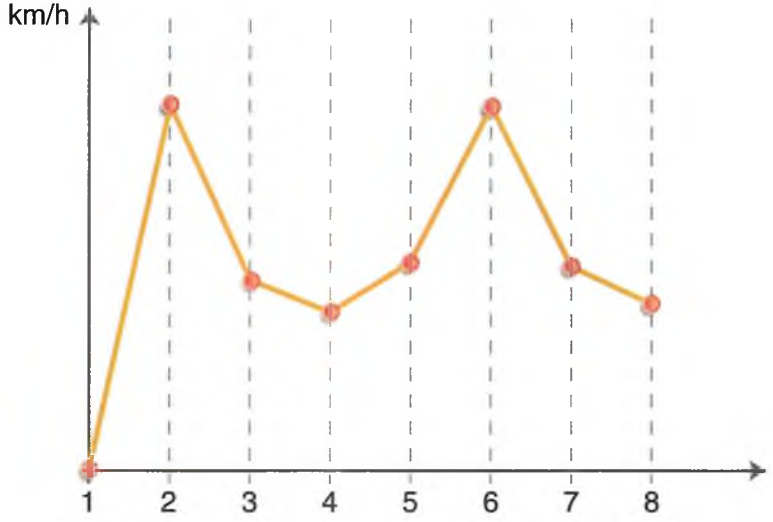
Puesto que 40 minutos son 2/3 partes de una hora, en los primeros 40 minutos de recorrido el coche recorrió 2/3 hora × 60 km/hora = 40 km En la segunda parte del viaje recorrió 1/2 hora × 80 km/hora = 40 km. En total, el coche recorrió 80 kilómetros.

La forma de la pista de carreras

En una pista de carreras, el coche al acercarse a una curva debe bajar su velocidad. Al salir de la curva la velocidad sube hasta alcanzar un máximo en la recta. Luego vuelve a bajar al entrar a otra curva y así sucesivamente.

La gráfica de velocidades de un coche en una pista ovalada, como la que vemos a continuación, se obtuvo midiendo la velocidad en una vuelta en los 8 puntos marcados en la pista:





Mi tabla de crecimiento

Para muchos asuntos importantes es conveniente realizar tablas de información, con lo cual posteriormente podrás contestar muchas preguntas. Por ejemplo, puedes medir cada mes tu estatura y tu peso, con lo cual al final del año sabrás cuánto has crecido, cuál es tu promedio de crecimiento mensual y muchas otras cosas.

En la siguiente tabla puedes ir anotando a lo largo del año tus datos de crecimiento. Hemos anotado junto a ellos los datos de crecimiento de otros dos amigos nuestros: Juan y Pedro.

En nuestra tabla, las estaturas están medidas en metros y el peso en kilogramos. Observa que en el año Juan creció 6 centímetros, mientras que Pedro creció sólo 4 centímetros. Sin embargo, Pedro sigue siendo más alto que Juan. Hay meses en que no se registró ningún crecimiento en nuestros amigos; sin embargo, el promedio de crecimiento mensual de Juan es de 0.5 centímetros y el de Pedro de 0.33 centímetros.

Al final del año debes contestar las siguientes preguntas: ¿Cuántos centímetros creciste? ¿Cuál fue tu promedio de crecimiento mensual?

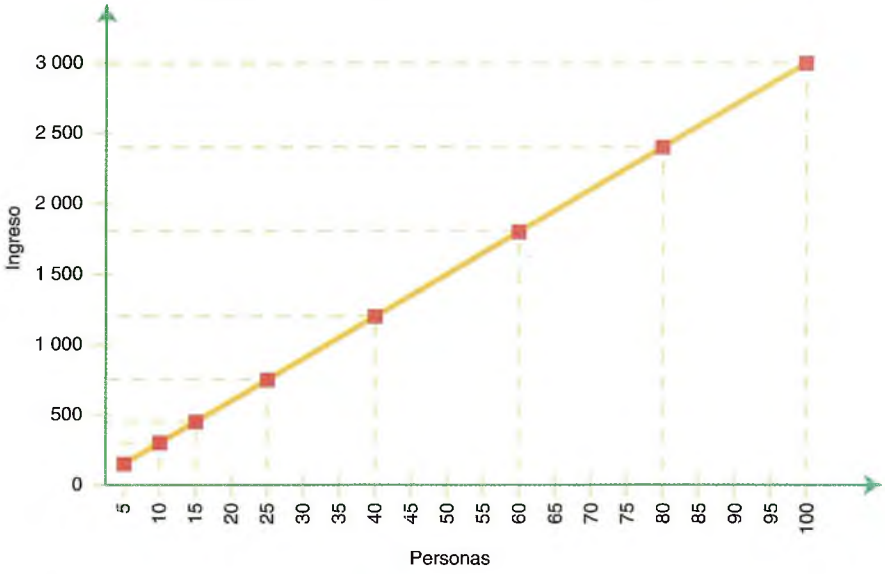
	Mis Datos		Datos Juan		Datos Pedro	
	Estatura	Peso	Estatura	Peso	Estatura	Peso
Enero			1.30	35	1.38	42
Febrero			1.30	35	1.38	42
Marzo			1.31	36	1.38	42
Abril			1.31	36.5	1.39	42.5
Mayo			1.32	36.5	1.39	42
Junio			1.32	37	1.40	42.5
Julio			1.33	37.5	1.40	43
Agosto			1.33	37.5	1.40	43
Septiembre			1.34	37	1.41	43
Octubre			1.35	37.5	1.41	43
Noviembre			1.35	37	1.42	44
Diciembre			1.36	37.5	1.42	44

Crecimiento lineal

Las gráficas asociadas a las tablas de información de algunos asuntos presentan un comportamiento particularmente simple. Por ejemplo, la cajera de un cine ha hecho la siguiente tabla de ingresos del cine:

No. personas	Ingreso en $
5	150
10	300
15	450
25	750
40	1 200
60	1 800
80	2 400
100	3 000

La gráfica correspondiente resulta ser la siguiente:



Todos los puntos de la gráfica caen sobre una línea recta. Decimos entonces que la gráfica es lineal. Decimos también que el asunto que estamos estudiando es un fenómeno lineal.

En los fenómenos lineales es posible hacer predicciones de lo que va a ocurrir en el futuro. Por ejemplo, si la cajera del cine sigue vendiendo boletos hasta llegar a los 500, ¿cuánto dinero tendrá? Siendo que cada boleto cuesta 30 pesos, es claro que tendrá 15 000 pesos.

Por supuesto, el crecimiento de una persona no es un fenómeno lineal. Si fuera lineal, cada año creceríamos lo mismo que el anterior, entonces nuestro amigo Juan mediría 2.50 metros de estatura dentro de 20 años y sería un gigante descomunal.

Las temperaturas en México

Los datos más importantes sobre lo que sucede en México y el mundo se registran en tablas y con ellos se elaboran gráficas. Así, hay tablas sobre la población en ciudades, estados y países, sobre la temperatura en cada lugar, la cantidad de lluvia cada día y otros asuntos más. Toda esta información resulta útil para entender lo que sucede en cada país, entender los problemas cuando se presentan y prevenir desastres.

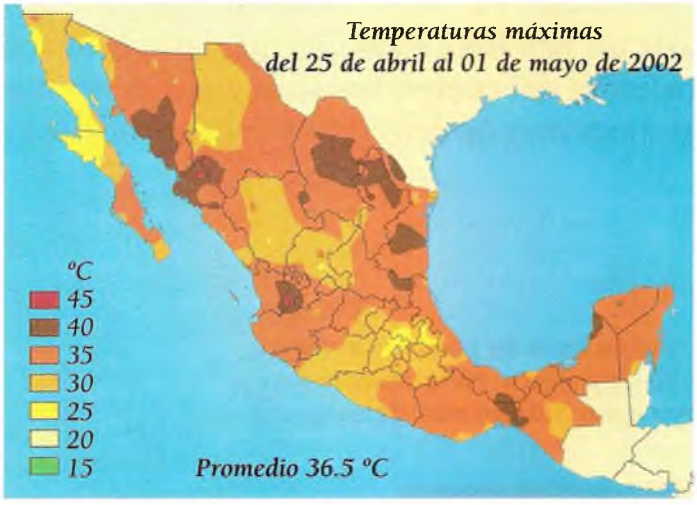
Cada hora, cada día, en cada ciudad importante se mide la temperatura a la intemperie. De esta manera se obtienen tablas de las temperaturas en muchos lugares del país. Se pueden hacer tablas con las temperaturas máximas medidas registradas durante el día, o bien con el promedio de las temperaturas de todo día.

En la siguiente tabla reproducimos los datos de la temperatura máxima promedio de cada mes en varias ciudades del país. Dicho promedio se calculó utilizando las temperaturas máximas de todos los días en los años 1951 a 1980.

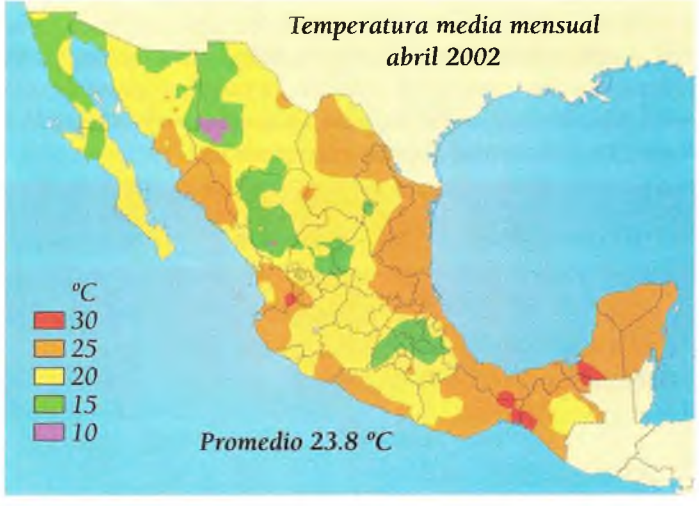
Ciudad	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
La Paz	23.5	25.1	27.1	30.1	33.1	35.1	36.4	36.1	35.1	32.9	28.6	24.8
Colima	31.2	31.7	32.9	34.2	34.7	33.5	32.8	32.0	31.0	31.4	32.1	31.1
Pachuca	18.7	20.0	22.6	23.4	22.9	20.7	19.4	19.8	18.9	18.8	18.8	18.4
Guadalajara	24.0	25.6	28.4	30.5	31.8	29.4	26.3	26.4	26.1	25.9	25.5	23.6
D.F.	21.2	22.9	25.7	26.6	26.5	24.6	23.0	23.3	22.3	22.2	21.8	20.8
Monterrey	20.3	22.6	26.3	29.8	31.3	33.1	34.1	33.7	30.7	26.9	22.7	20.6
Hermosillo	23.6	25.7	27.8	32.1	35.7	39.6	39.2	38.2	37.8	34.6	28.5	24.1
Jalapa	19.7	20.5	23.4	25.5	25.9	24.8	23.9	24.5	23.9	22.5	21.2	20.0
Toluca	17.0	18.1	20.4	21.3	21.1	19.5	18.0	18.3	18.1	18.3	17.6	16.9

Estas temperaturas promedio pueden ser de gran importancia. Si comparamos los datos de la tabla con los de días recientes y observamos que en estos últimos la temperatura ha sido más alta que lo normal, podemos determinar si se esperan sequías o incendios forestales en los próximos días.

Sin embargo, los datos presentados de esta manera no resultan fáciles de leer y necesitaríamos varias páginas para tener la información detallada de las principales ciudades de todo el país. Por ello, es mejor presentar este tipo de información directamente sobre el mapa del país. Por ejemplo, la temperatura máxima promedio de la semana del 25 de abril al 1 de mayo de 2002 en todo el país está representada en el siguiente mapa.



En este mapa queda claro que la temperatura máxima reportada en todo el país fue bastante alta esa semana. ¿En qué lugares de la República la temperatura estuvo por arriba del promedio de los años 1951-1980?



Más significativa resulta la temperatura media registrada en un lugar, esto es, el promedio de temperaturas a lo largo del día. En el siguiente mapa apreciamos la temperatura media mensual durante el mes de abril de 2002.

Observa que la temperatura media en el día es bastante más baja que la temperatura máxima. De hecho la temperatura máxima promedio en abril de 2002 en todo el país fue de 36.5 °C, mientras que la temperatura media en ese mismo mes en todo el país fue de 23.8 °C.

Las matemáticas y la vida humana

Por siglos los científicos y los médicos han buscado maneras para curar las enfermedades y entender el funcionamiento del cuerpo humano. Tanto médicos como artistas trataron de cuantificar las proporciones del cuerpo humano. Por ejemplo, Leonardo da Vinci realizó precisos dibujos anatómicos y Galileo estudió el ritmo cardiaco, comparándolo con el ritmo de oscilación de un péndulo. Actualmente, las matemáticas explican muchas de las funciones del cuerpo humano y son de gran utilidad en el diseño de técnicas modernas de detección y tratamiento de enfermedades.

Galileo Galilei.

Información sobre la vida

El registro metódico de datos sobre el ser humano nos permite conocer información de vital importancia. Por ejemplo, a continuación damos el tiempo promedio de vida (en años) de los habitantes de varios países.

País	Promedio de vida	
	Hombres	Mujeres
México	68.5	74.3
Francia	74.8	82.9
Estados Unidos	74.2	79.9
Nigeria	51.6	51.6
China	69.6	73.3

Por supuesto, lo primero que nos llama la atención es que las mujeres viven, en promedio, más que los hombres, salvo en el caso de Nigeria, que tiene un bajo promedio de vida tanto para hombres como para mujeres. Si bien actualmente un ciudadano de México puede esperar vivir alrededor de 70 años, y en otros países aún más, no siempre ha sido así. En 1700, el promedio de vida de las personas era de 30 años y para 1900 era de 40.

Galileo comparó el ritmo cardiaco con la oscilación de un péndulo

Los espectaculares avances de la medicina han permitido erradicar casi completamente algunas enfermedades, otras incluso ya no cobran muchas víctimas. En México, la principal causa de muerte son los problemas cardiacos, pero los accidentes han tomado el lugar que antes tenían algunas enfermedades.

Causas de muerte en México (1996)	No. de decesos	% del total
Corazón	65 603	15
Cáncer	49 916	11.4
Accidentes	35 073	8.0
Otras	285 729	65.6

Los datos promedio sobre todo tipo de variables físicas del hombre son muy importantes. Conocer el valor promedio de la presión arterial, la frecuencia cardiaca, la estatura de las personas, su peso, el número de glóbulos en la sangre por mm^3, el contenido de colesterol en la sangre, entre otras cosas, permite establecer rangos de normalidad; es decir, las personas que se alejan claramente del promedio de la población deben ser tratadas con cuidados médicos.

En los últimos años las matemáticas han permitido el desarrollo de nuevas técnicas médicas de diagnóstico y prevención de enfermedades. Entre otros avances que han impactado la práctica médica contamos los siguientes:

- *Tomografía: por medio de esta técnica es posible obtener imágenes muy precisas de órganos internos del cuerpo humano, por supuesto, sin abrirlo.*

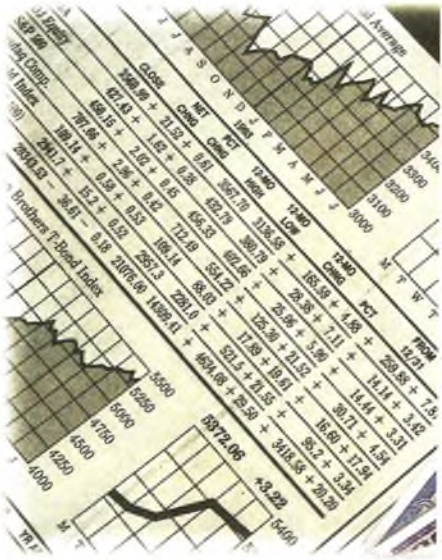
- *Estudios de la actividad cerebral y cardiaca mediante métodos de la moderna teoría del caos, uno de los más recientes avances de las matemáticas.*

- *Uso de computadoras para la identificación rápida de muestras de DNA.*

Como actividad importante te sugerimos que discutas estos temas con tu maestro de biología y consultes libros sobre el tema.

¿Qué es la estadística?

La estadística es la recopilación y análisis de datos sobre fenómenos o hechos que nos interesan. Estos datos frecuentemente se presentan por medio de tablas como las que hemos encontrado en los temas anteriores. Las tablas sirven para mostrar de manera clara las principales características del fenómeno que se estudia. En algunas ocasiones es muy difícil recopilar todos los datos posibles acerca del mismo fenómeno. Por ello se realiza una selección cuidadosa de los casos que se pueden estudiar y se lleva a cabo una encuesta.



El censo

Muchos de los fenómenos que se desean estudiar se refieren a aspectos de las personas o de la vida social y económica de los países. Para estudiarlos se pueden preguntar los datos a todos los habitantes de un país. En México cada 10 años se realiza el Censo Nacional de Población y Vivienda en el cual se pregunta a cada uno de los mexicanos datos importantes: edad, sexo, escolaridad, ocupación, ingresos económicos, características de la casa donde habita y otros datos importantes. Estos datos sirven para saber cuántos mexicanos somos, cómo somos, los principales problemas que tenemos y cómo resolverlos.

Algunos datos del último Censo de Población y Vivienda:
Población: 100 349 766 habitantes.
Edad promedio: 21.7 años.

En muchas ocasiones resulta difícil, tardado y muy costoso preguntar a todas las personas los datos que deseamos estudiar para poder saber cuál es el resultado promedio. Por ejemplo, si deseamos saber cuál es la edad promedio de los habitantes de nuestra ciudad, tendríamos que preguntar su edad a todos y cada uno de ellos. ¡Una tarea titánica!

En muchos casos, para estudiar los datos de una población, se elige un grupo más pequeño y se le estudia. Este grupo pequeño se llama muestra y si está bien elegido, el resultado promedio que obtengamos será muy parecido al de la población completa.

INEGI

El INEGI es el encargado de realizar el censo de población y vivienda

¡Hay que elegir bien la muestra!

Elegir adecuadamente la muestra no es una tarea fácil y frecuentemente lleva a resultados erróneos en las encuestas. Por ejemplo, si deseamos saber la edad promedio de los habitantes de la ciudad y elegimos como muestra la fracción de la población que está en la plaza central de la ciudad entre las once y las doce de la mañana, estaremos cometiendo un grave error, ya que los niños están en la escuela a esas horas. El resultado que obtendremos será mucho mayor que el real. A veces, sin embargo, los errores son más sutiles.

La muestra es el conjunto de personas que elegimos como representantes de toda la población.

Si deseamos saber cuáles son los ingresos económicos de las familias mexicanas, cometeríamos un error si realizáramos una encuesta telefónica, pues en México hay menos de 10 millones de teléfonos y las familias que tienen uno son las de mayor ingreso económico. Por ello, los resultados obtenidos tomando una muestra así serán más altos que los reales.

Para que una muestra sea correcta deben tomarse en cuenta muchas variables: la proporción de hombres y mujeres en la población, quiénes son habitantes de la ciudad y quiénes del campo, quiénes son técnicos y quiénes profesionistas, etcétera.

Fenómenos regidos por el azar

Lanzar una moneda al aire para ver si cae águila o sol o lanzar dos dados para ver cuánto suman sus caras son fenómenos cuyo resultado no podemos predecir, por lo que decimos que son fenómenos regidos por el azar.

También podemos decir que son fenómenos aleatorios o de suerte (la palabra griega álea significa "suerte"). El estudio de este tipo de fenómenos es muy importante y puede hacerse por medio de las matemáticas.

¿Águila o sol?

Una moneda lanzada al aire puede caer tanto en águila como en sol. Esto es, en una moneda normal, sin deformaciones, existe el mismo número de posibilidades de que caiga águila o sol. Por ello decimos que la probabilidad de que salga sol es 1/2 y la probabilidad de que salga águila es 1/2 . ¿Quiere decir esto que de dos volados, uno saldrá águila y el otro sol y que en cuatro volados, saldrán dos águilas y dos soles? No. Veamos con cuidado un experimento:

Echemos volados con una moneda y vayamos anotando los resultados. Abajo anoto los resultados que obtuve al arrojar una moneda 80 veces:

Sol, Águila, Águila, Sol, Sol, Águila, Sol, Sol, Sol, Águila, Sol, Águila, Águila, Sol, Sol, Sol, Sol, Águila, Águila, Águila, Águila, Sol, Sol, Águila, Sol, Sol, Águila, Sol, Sol, Águila, Sol, Águila, Águila, Águila, Sol, Sol, Sol, Águila, Águila, Sol, Águila, Sol, Águila, Águila, Águila, Sol, Águila, Águila, Águila, Águila, Águila, Sol, Sol, Sol, Sol, Sol, Águila, Sol, Águila, Águila, Águila, Sol, Sol, Sol, Águila, Sol, Águila, Águila, Águila, Águila, Sol, Sol, Águila, Sol, Sol, Sol, Águila, Águila.

Podemos elaborar una sencilla tabla del experimento realizado con la moneda:

Número de volados (V)	Número de soles (S)	S/V
3	1	0.33
10	6	0.6
20	11	0.55
30	17	0.56
40	22	0.55
50	24	0.48
60	31	0.516
70	36	0.514
80	40	0.5

Al echar el primer volado no sabemos qué resultará. Digamos que, como en nuestro primer volado, sale sol. ¿Qué debemos esperar del segundo volado? Nada especial, es tan probable que salga águila como que salga sol: ¡la moneda no recuerda lo que salió en el primer volado!

Y si en los cuatro primeros volados salen soles, ¿qué debemos esperar del quinto volado? Otra vez, nada especial. Es tan probable que salga águila como que salga sol. Lo que es muy difícil que pase es que nos salgan 5 o más soles en forma consecutiva.

Lo que debemos esperar es que conforme echemos más y más volados, la proporción de soles sea más y más parecida a la proporción de águilas. Esto es, conforme más volados echemos, el cociente S/V se parecerá más y más a 1/2. Esto se conoce como la Ley de los Grandes Números.

Tirando los dados

Al arrojar un dado a la mesa sabemos que es igualmente probable que salga uno de los seis números: 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Puesto que hay 6 resultados igualmente probables, entonces la probabilidad de que al arrojar el dado salga 1 o cualquiera de los cinco números es de 1/6.

Esto quiere decir que si tiramos los dados muchas veces, digamos N veces, debemos esperar que el número de veces que sale 1 sea parecido a N/6.

Teoría de las probabilidades

La teoría de las probabilidades es la parte de las matemáticas que estudia los fenómenos aleatorios. Los primeros estudios en teoría de probabilidades se realizaron con el objetivo de determinar las oportunidades de ganar en juegos de azar, como los dados o las cartas. Pronto esta teoría encontraría un gran número de aplicaciones en muchas situaciones importantes de la vida cotidiana.

Breve recorrido por la teoría de las probabilidades

El uso de la probabilidad y la estadística datan, al menos, del tiempo de los faraones egipcios. En efecto, en esos tiempos se levantaron los primeros censos de población y se calculaban los beneficios de los campos de cultivo.

En el siglo XVII hubo un gran desarrollo de la teoría de la probabilidad, ya que algunos matemáticos intentaron determinar las posibilidades de ganar en los juegos de azar.

La obra más importante en el marco de la teoría de las probabilidades fue escrita por el matemático francés Pierre Simon de Laplace. En ella aparece por primera vez la regla de Laplace, la cual es fundamental para la determinación de las probabilidades de un suceso.

Pierre Simon de Laplace, grabado de Delaistre.

Sin duda, otro de los matemáticos que más aportó a la teoría de las probabilidades es el ruso Kolmogorov, quien define la teoría en la manera que se estudia hoy en día.

Al estudiar un fenómeno nos preguntamos cuál es la probabilidad de que un suceso en particular resulte cierto, por ejemplo, que al lanzar un dado sus caras sumen 4. El matemático Laplace estableció la siguiente regla: contemos primero todos los posibles resultados del fenómeno que estamos estudiando, digamos R, luego contemos todos los posibles resultados que serían exitosos, digamos E, entonces la probabilidad de que suceda lo que queremos es de E/R.

Sucesos independientes y sucesos complementarios

Si deseamos calcular la probabilidad de que tengan lugar dos sucesos de manera consecutiva, debemos que proceder con cuidado.

Decimos que dos sucesos son independientes si el resultado del segundo no condiciona de ninguna manera el resultado del primero. Por ejemplo, los resultados que se obtienen al arrojar dos dados son dos sucesos independientes: el resultado del primero y el resultado del segundo. En pocas palabras, el resultado del segundo dado no depende en absoluto del primero.

Por otro lado, cuando tenemos dos sucesos independientes, la probabilidad de que sucedan los dos es el producto de la probabilidad de que suceda cada uno de ellos. Por ejemplo, la probabilidad de que al arrojar un dado se obtenga 6 es de 1/6 y la probabilidad de que al arrojar dos dados se obtenga un doble 6 es de

$$1/6 \times 1/6 = 1/36.$$

Decimos que dos sucesos son complementarios si cada vez que no ocurre el primer suceso, ocurre el segundo y, a la inversa, cuando no ocurre el segundo, ocurre el primero. La suma de la probabilidad de dos sucesos complementarios siempre es 1. Por ejemplo, el hecho de que al arrojar un dado salga un número menor o igual a 5 es un suceso complementario al hecho de que salga 6. La probabilidad de sacar 1, 2, 3, 4 o 5 al tirar un dado es de 5/6 y la probabilidad de sacar 6 es de 1/6. Así,

$$5/6 + 1/6 = 1.$$

Sucesos seguros e imposibles

Un suceso que tiene probabilidad 1 es seguro que pase.

Un suceso que tiene probabilidad 0 es imposible que pase.

CONTANDO CON CUIDADO

Una importante dificultad al tratar de aplicar los principios de la teoría de probabilidades es determinar todas las formas posibles en que un suceso puede ocurrir. Por ello, hay que pensar con cuidado cómo contar, aun en los casos que parecen más sencillos.

¿Qué probabilidad hay de que un hermano tenga una hermana?

Sabemos que la mamá de Juan tiene dos hijos, pero no sabemos si los dos son varones o si Juan tiene una hermana. ¿Cuál es la probabilidad de que Juan tenga un hermano?

¡La respuesta no es 1/2! Sabemos que la probabilidad de que una persona elegida al azar sea varón es de 1/2, pero en el caso de los hijos de la mamá de Juan hay las siguientes posibilidades:

Varón + varón

Mujer + varón

Mujer + varón

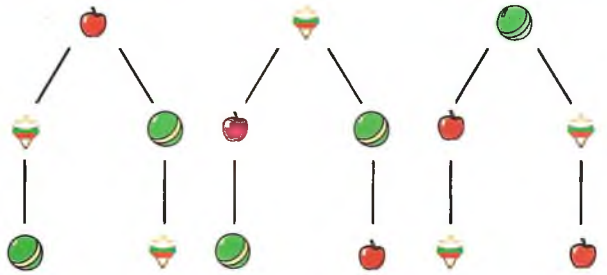
Mujer + mujer

Luego, de las 3 posibilidades de secuencias de hijos, sólo en la primera hay dos hijos varones. Así, la probabilidad de que Juan tenga un hermano es de 1/3.

Metiendo la mano en la bolsa

Tenemos una bolsa con tres objetos diferentes. Sacaremos los objetos uno por uno. Queremos saber con qué probabilidad podemos adivinar el orden en que saldrán los objetos.

Cada extracción de los tres objetos de la bolsa es igualmente probable, por lo que sólo tenemos que determinar de cuántas posibles formas podemos sacar los tres objetos. Las posibilidades están ilustradas enseguida:



Vemos aquí que el primer objeto se puede tomar de 3 maneras posibles, pero una vez elegido sólo quedan 2 objetos en la bolsa; por lo tanto, en cada uno de los 3 casos sólo hay 2 posibilidades para la segunda extracción. La tercera extracción queda determinada por las otras dos. Luego, el número de posibilidades de extracción se calcula como $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Si tuviéramos 4 objetos diferentes en la bolsa —digamos que agregamos una pera—, las posibilidades de extracción serían $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$. El resultado de multiplicar un número n por todos los números que le preceden es denotado por n!, que se lee "n factorial".

$5! = 120$
$6! = 720$
$8! = 5\,760$
$9! = 51\,840$

Metiendo de nuevo la mano en la bolsa

Tomamos ahora la bolsa con 4 objetos diferentes y sacamos sin ver 2 objetos simultáneamente. ¿Cuál es la probabilidad de que adivinemos los objetos que saldrán?

Otra vez se trata de contar los posibles casos:
pera y manzana
pera y pelota
pera y trompo
manzana y pelota
manzana y trompo
pelota y trompo

Luego, hay 6 casos diferentes. Si tuviéramos 5 objetos dentro de la bolsa, entonces el número de posibilidades de extraer 2 objetos sería 10. ¿Por qué?

El número calculado se llama las combinaciones de 4 tomados de 2 en 2 y se expresa como

$$\binom{4}{2}$$

Así también

$$\binom{4}{2} = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1}$$

En general, el número de combinaciones posibles de n objetos tomados de t en t resulta

$$\binom{n}{t} = \frac{n!}{t!(n-t)!}$$

¿Cuándo lloverá?

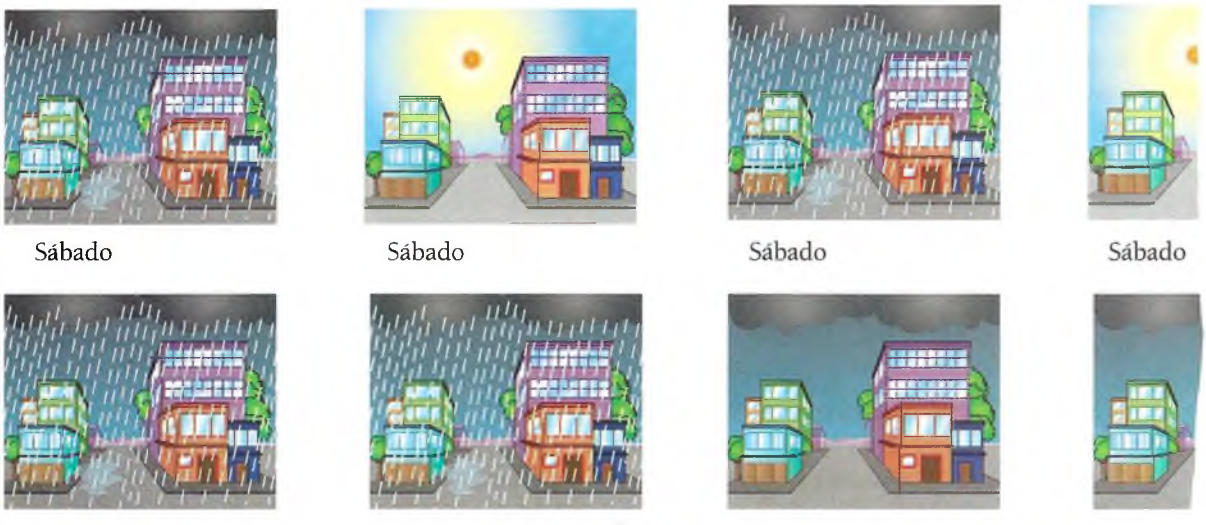
Los meteorólogos estudian los cambios en la atmósfera (la formación de nubes, ciclones, vientos y lluvias) para tratar de hacer predicciones sobre el clima de los próximos días. La tarea no es fácil y sólo con cierta probabilidad pueden saber lo que pasará mañana.

Cuando un suceso es completamente seguro, también decimos que ocurrirá con un 100 por ciento de probabilidades. Como vemos, los porcentajes son una manera usual de escribir la probabilidad de que un suceso ocurra. Así, si un evento tiene 0.6 de probabilidades de ocurrir, diremos que es 60 por ciento seguro que suceda y, por otro lado, si tiene 0.8 probabilidades de realizarse, diremos que es 80 por ciento seguro que ocurra.

Lluvias para el fin de semana

En el noticiero del viernes se dio un informe acerca de las condiciones del tiempo para el fin de semana: "Hay 50 por ciento de probabilidad de que llueva el sábado y 50 por ciento de probabilidad de que llueva el domingo". La mamá de Juan concluye que lloverá el fin de semana. Pero Juan, que había estudiado sus clases de probabilidad, corrige a su madre indicándole que sólo hay 75 por ciento de probabilidades de que llueva el fin de semana. ¿Quién tiene razón?

Como siempre, el problema se resuelve contando todas las situaciones posibles y luego viendo cuáles nos interesan. Juan hizo el siguiente dibujo a su madre.

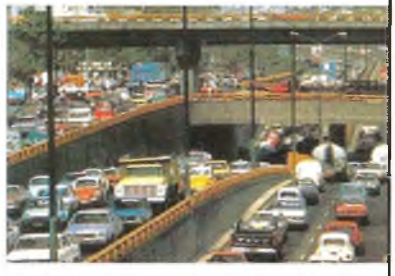


Posibles situaciones para el fin de semana.

Entonces les quedó claro que había 4 posibles situaciones para el clima del fin de semana y que sólo en 3 de ellas era seguro que lloviera. Juan tenía razón.

Cuando oímos que la probabilidad de lluvias por la tarde es de 50 por ciento, ¿qué debemos entender? ¿Va a llover en la mitad de la ciudad? ¿Va a llover la mitad de la tarde? ¿La lluvia depende de un volado?¿Los meteorólogos no saben nada?

Debemos entender que si hubiera muchos días, digamos 1 000, con las mismas condiciones atmosféricas que hoy, entonces llovería aproximadamente la mitad de esos días. Pero en realidad, no hay dos días que tengan exactamente las mismas condiciones atmosféricas, por lo que las indicaciones de los meteorólogos son sólo aproximadas.



Errores y horrores

Se cuenta que el gobierno de cierta ciudad decidió hacer algo por mejorar el tránsito en las calles. Los congestionamientos eran ya insoportables.

El alcalde pensó: "si ponemos tres carriles en las calles que sólo tienen dos, entonces podrán circular más coches por las calles". Enseguida dio la orden de borrar las rayas de los carriles en las calles y pintarlas de nuevo. Pero los problemas continuaron, ahora el tránsito era muy lento, pues los coches apenas cabían en los carriles y los conductores temían chocar fácilmente.

El alcalde dijo entonces: "vuelvan a pintar sólo dos carriles en las calles donde habíamos puesto tres". Inmediatamente se repintaron las calles como estaban al principio. Al día siguiente un ayudante del gobernador le dijo: "Oh, sabio alcalde, en verdad ha logrado mejorar el tránsito en la ciudad. Con su orden de julio el número de coches que podían circular por las calles se incrementó un 50 por ciento. Con su orden de septiembre, el número de coches que podían circular disminuyó en 33 por ciento. Por lo tanto, la capacidad de tránsito en la ciudad aumentó en 50 por ciento – 33 por ciento = 16.6 por ciento. ¡Maravilloso!".

A pesar de esto, los ciudadanos no notaron ninguna diferencia en la ciudad. ¿Por qué?

Las calles en junio.

Las calles en julio.

Las calles en septiembre.

EL PROBLEMA DE PASCAL

Como vimos en un tema anterior, en el siglo XVII los matemáticos se preocuparon por analizar las probabilidades de ganar en los juegos de azar, ya fueran dados o cartas. Es famoso el problema que un aristócrata francés cuya diversión era jugar a los dados planteó al matemático y filósofo Blaise Pascal: "¿Qué es más probable, que con cuatro lances de un dado salga al menos un seis o que con 24 lances de dos dados salga al menos un par simultáneo de seises?". La solución del problema depende de la aplicación de la regla de Laplace o bien del cálculo de la probabilidad de sucesos independientes.

Apliquemos la regla de Laplace para resolver el problema que el aristócrata jugador planteó a Pascal. Para ello, hay que calcular la cantidad total R_1 de posibles resultados al tirar un dado 4 veces y la cantidad de posibles resultados exitosos E_1; de esta manera la probabilidad buscada será E_1 / R_1.

En el primer caso, los posibles resultados de tirar un solo dado 4 veces son

$$R_1 = 6 \times 6 \times 6 \times 6 = 1\,296,$$

ya que en los cuatro lanzamientos se puede obtener cualquier número entre 1 y 6. De estos lanzamientos los exitosos son aquellos donde se obtiene al menos un 6. ¿Cuántos son? Contemos las maneras posibles de lanzar el dado 4 veces sin obtener nunca un 6: en los cuatro lanzamientos tendría que salir un número entre 1 y 5. Hay, por lo tanto, $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ lanzamientos no exitosos, esto es, el número posible de lanzamientos exitosos es:

$$E_1 = 1\,296 - 625 = 671.$$

Entonces la probabilidad de sacar al menos un 6 en cuatro lanzamientos de un dado es:

$$E_1 / R_1 = 0.517.$$

En el caso de los dos dados, arrojados 24 veces, los posibles resultados son

$$R_2 = 36 \times 36 \times \ldots \times 36 \times 36,$$

multiplicando 24 veces el número 36, que es el número de posibles resultados al arrojar dos dados.

El número de casos no exitosos en cada tirada es 35, luego los casos donde no hay ningún par de seises en 24 tiradas de dados es:

$$N_2 = 35 \times 35 \times \ldots \times 35 \times 35,$$

multiplicando 24 veces el número 35. El número de casos exitosos es $E_2 = R_2 - N_2$. Finalmente, la probabilidad de sacar al menos un par de seises en 24 tiradas de dados es:

$$E_2 / R_2 = 0.491.$$

¡Problema resuelto! Es más probable sacar algún 6 tirando 4 veces un dado que sacar un par de seises tirando 24 veces un par de dados. Por supuesto, para realizar estas operaciones requerimos de una buena calculadora de bolsillo.

Sucesos independientes y el problema de Pascal

Consideremos nuevamente el problema de Pascal. En el caso de un solo dado tirado 4 veces, cada uno de los lanzamientos del dado es independiente de los otros tres. Por ello, la probabilidad de no obtener un 6 tirando una sola vez el dado es de 5/6 y la probabilidad de no obtener un 6 en ninguna de las 4 tiradas del dado es

$$5/6 \times 5/6 \times 5/6 \times 5/6 = 0.4822.$$

Entonces la probabilidad de obtener un 6 en alguna de las 4 tiradas es

$$1 - 0.48220 = 0.517.$$

Similarmente, la probabilidad de no obtener un doble 6 tirando una vez los dados es de 35/36. Por lo tanto, la probabilidad de no obtener un doble 6 después de tirar los dados 24 veces es de

$$35/36 \times 35/36 \times \ldots \times 35/36 \times 35/36 = 0.5085$$

multiplicando 24 veces la fracción 35/36. La probabilidad de obtener un doble 6 en 24 tiradas de dos dados es entonces:

$$1 - 0.5085 = 0.4914$$

como ya habíamos calculado.

Blaise Pascal.

Chicles de colores y cumpleaños

Hay muchas situaciones en la vida en que no sabemos qué va a pasar, pero nos gustaría saberlo. Por ejemplo, cuando compramos un boleto para participar en una rifa o sorteo o cuando participamos en un concurso de pronósticos deportivos. La teoría de probabilidades nos puede indicar lo que podemos esperar en todas estas situaciones.

Juan va a una farmacia donde hay una máquina que vende chicles de colores. Cada vez que deposita un peso, la máquina le devuelve un chicle, pero Juan no sabe de qué color será. Juan desea un chicle rojo y antes de depositar su primera moneda cuenta cuántos chicles hay en el ánfora de la máquina: 10 chicles rojos, 6 azules y 9 blancos. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Juan de sacar un chicle rojo al depositar su primer peso? ¿Cuál es la probabilidad de que Juan obtenga un chicle rojo si está dispuesto a gastar hasta 3 pesos?

Ayudemos a Juan. Según la regla de Laplace debemos contar cuántos resultados posibles existen al depositar la primera moneda: hay 25 resultados posibles, de los cuales 10 son exitosos. Por lo tanto, la probabilidad de sacar un chicle rojo al depositar la primera moneda es de 10/25 = 0.4. Si al depositar el primer peso no sale un chicle rojo, entonces la probabilidad de sacarlo con la segunda moneda es de 10/24 = 0.416, pues ahora sólo quedan 24 chicles en el ánfora.

La probabilidad de que Juan obtenga el chicle deseado con 3 pesos se puede calcular así: si con tres pesos no obtiene el chicle rojo, quiere decir que con la primera moneda obtuvo otro color, lo cual puede ocurrir con una probabilidad de 15/25; con la segunda moneda obtuvo también otro color, lo que puede ocurrir con probabilidad de 14/24 y de igual manera con la tercera moneda obtiene un color diferente al rojo, lo que puede ocurrir con probabilidad de 13/23. Puesto que los tres sucesos son independientes, entonces la probabilidad de que no obtenga el chicle deseado es de:

$$15/25 \times 14/24 \times 13/23 = 0.19.$$

Por tanto, podemos concluir que la probabilidad de que Juan tenga el chicle rojo luego de usar 1, 2 o 3 pesos es de

$$1 - 0.19 \times 0.81.$$

Esto no es una mala noticia para Juan. Quiere decir que si va a la farmacia todos los días del año, dispuesto a gastar 3 pesos para obtener el chicle rojo, lo obtendrá aproximadamente en 295 días (observa que $365 \times 0.81 = 295.65$).

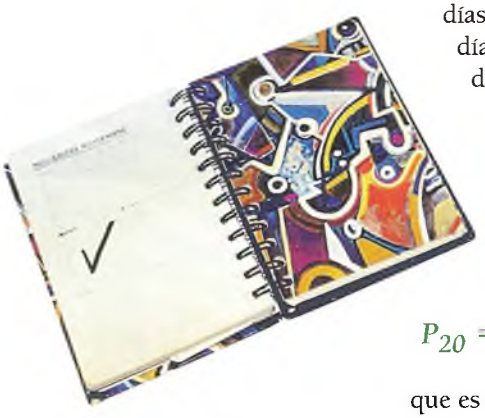
¿Cuándo cumples años?

Haz el siguiente juego en tu salón de clase, o en una fiesta con tus amigos.

En una fiesta en casa de Juan, éste les dice a los 20 invitados que está seguro de que hay dos de ellos que cumplen años el mismo día. ¡Ésta es una afirmación sorprendente! ¿Cómo puede saberlo si en la fiesta hay 20 personas y hay 365 días del año?

Veamos cuál es la probabilidad de que 20 personas cumplan años en días distintos. Comencemos por un caso más sencillo: cuál es la probabilidad de que dos personas cumplan años en días distintos. La segunda persona sólo tiene 364 posibilidades de que su cumpleaños no sea el mismo día que el de la primera persona. Por lo tanto, la probabilidad de que cumplan años en días diferentes es de 364/365. Luego, la probabilidad de que dos personas cumplan años el mismo día es de

$$P_2 = 1 - 364/365 = 0.0027,$$



un número muy pequeño. La probabilidad de que tres personas cumplan años en días diferentes es de $364/365 \times 363/365$, pues la tercera persona sólo tiene 363 días en que puede cumplir años. Por tanto, la probabilidad de que en un grupo de tres personas dos de ellas cumplan años el mismo día es de

$$P_3 = 1 - 364/365 \times 363/365 = 0.0082,$$

Todavía un número pequeño. Pero cuando repetimos el razonamiento para 20 personas, tenemos que la probabilidad de que dos de ellas cumplan años el mismo día es de

$$P_{20} = 1 - 364/365 \times 363/365 \times 362/365 \times \ldots \times 346/365 = 0.998,$$

que es un número sorprendentemente cercano a 1. ¡Esto quiere decir que casi con certeza dos de los amigos de Juan cumplen años el mismo día!

La falacia del jugador

En los juegos de azar pueden suceder acontecimientos inesperados. Por ejemplo, al echar volados pueden salir repetidamente muchos "soles", por lo que tendemos a esperar que el siguiente volado resulte "águila". Esto no es así; a pesar de lo que haya pasado en los volados anteriores, el siguiente volado tiene la misma probabilidad de resultar "águila"o "sol".

Ya lo hemos dicho antes: la moneda con la que jugamos volados no recuerda lo que pasó en los volados anteriores. Por tanto en el próximo volado la probabilidad de obtener "águila" sigue siendo 1/2. Lo anterior es, a veces, difícil de entender para los sorprendidos jugadores. Hubo un incidente famoso en el Casino de Monte Carlo en 1913: en la ruleta salió 26 veces consecutivas el negro. A partir de la quinceava ocasión que esto ocurría, un gran número de apostadores se reunió alrededor de la mesa para apostar fuertes sumas de dinero a favor del rojo para la siguiente tirada de la ruleta. Como consecuencia, el Casino de Monte Carlo obtuvo grandes ganancias.

¿Un método ganador?

El siguiente método de apuesta ha sido propuesto en múltiples ocasiones para ganar a lo seguro. Vamos a jugar volados y apostemos siempre al "sol". En el primer volado apostamos un peso; si ganamos, en el segundo volado apostamos un peso, y si perdemos, apostamos dos. Supongamos que continuamos así, si ganamos un volado, volvemos a apostar lo mismo que en el volado anterior, si lo perdemos, apostamos el doble. ¿Qué pasa si hacemos esto? Veamos un ejemplo:

Volado	Apuesta previa	Ganancia
	1	
S	1	1
A	2	0
S	2	2
A	4	0
A	8	−4
S	8	4
S	8	12
A	16	4
S		20

Un poco de matemáticas nos muestran que si tenemos una cadena de volados perdidos y luego ganamos uno, automáticamente recuperamos todas nuestras pérdidas. En efecto, si perdemos 5 volados consecutivos, habremos perdido

$$1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31 \text{ pesos}$$

Pero para el sexto volado apostaremos entonces 32 pesos y si lo ganamos tendremos ganancias netas de 1 peso. ¡Basta esperar el tiempo suficiente hasta que salga un "sol" para salir ganando con este método! ¿Cierto?

El problema es que puede haber rachas perdedoras. ¿Qué sucede si al jugar volados perdemos 26 veces consecutivas como sucedió en Monte Carlo? Habremos perdido en ese momento

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{24} + 2^{25} = 2^{26} - 1 = 67\,108\,863 \text{ pesos.}$$

Eso es mucho más dinero del que tenemos. Estaremos en banca rota antes de poder continuar jugando más de 10 o 12 volados. Definitivamente, el método no es tan bueno como parece.

Azar y supersticiones

Hay muchas situaciones regidas por el azar en las cuales los resultados inesperados nos hacen pensar que tenemos algún control sobre éstas cuando en realidad no sabemos nada. Pensemos en los siguientes casos:

- El papá de Juan ha sacado reintegro 5 semanas consecutivas comprando billetes de lotería con terminación 7. Espera seguir ganando si vuelve a jugar el 7.

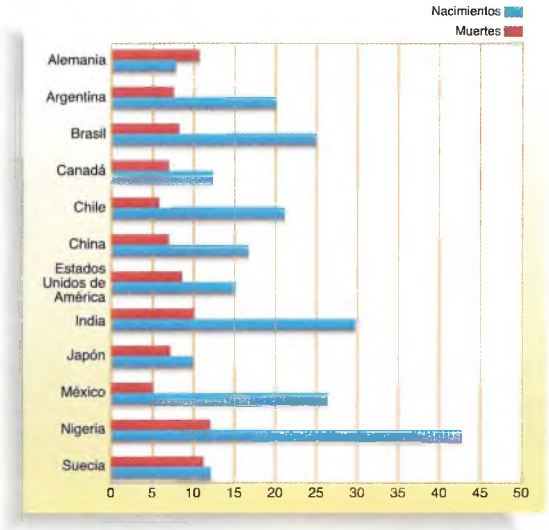
- Juan y María van al cine y se forman en filas diferentes para comprar refrescos en la dulcería. La fila de Juan siempre avanza más rápido, por lo que María decide mejor formarse en la fila que elija Juan.

En realidad la probabilidad de que el papá de Juan gane reintegro la próxima vez que juegue a la lotería es de 1/10. En cuanto a María, nada le garantiza que la fila de Juan avanzará más rápido que las otras la próxima ocasión.

La tasa de crecimiento del país

Una importante aplicación de la estadística es el registro del número de nacimientos y muertes en cada ciudad y nación. Los datos acumulados de varios años permiten obtener la tasa de crecimiento del país, información muy importante para predecir cuántos habitantes seremos en el futuro y planificar el desarrollo del país.

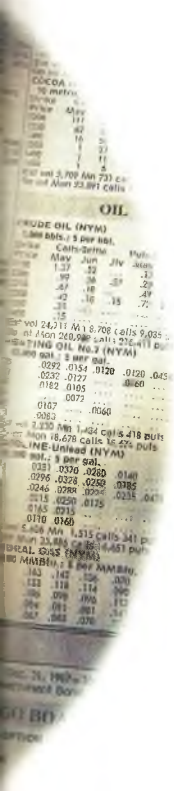
La siguiente gráfica nos muestra las estadísticas de varios países del mundo en lo que se refiere a nacimientos y muertes. La gráfica ofrece los resultados relativos a cada 1 000 habitantes a lo largo de varios años; esto es, la barra azul muestra cuántos habitantes nacen en promedio por cada 1 000 habitantes y la barra roja muestra cuántos habitantes mueren por cada 1 000.



Estos números se conocen también como la tasa de nacimientos y muertes por cada 1 000 habitantes.

Observamos, por ejemplo, que Nigeria es el país donde más personas nacen y también donde más personas mueren por habitante. México, por su parte, es el país donde menos personas mueren por habitante. Llamaremos t_n a la tasa de nacimientos por cada habitante y t_m a la tasa de muertes por cada habitante. Estos números se obtienen dividiendo entre 1 000 los números expuestos en la gráfica anterior.

Población de Nigeria.



La tasa de crecimiento de un país se obtiene como la diferencia entre la tasa de nacimientos menos la tasa de muertes. Así, la tasa de crecimiento de México es:

$$t_c(\text{México}) = t_n\,(\text{México}) - t_m(\text{México}) = 0.027 - 0.005 = 0.022.$$

Este número indica que por cada habitante de México, cada año el país crece en promedio 0.022 habitantes. Puesto que México tenía 100 millones de habitantes en el año 2000, entonces ese año el país creció en 2 200 000 habitantes.

Si hacemos el mismo cálculo para Alemania resulta que tiene tasa de crecimiento:

$$t_c(\text{Alemania}) = t_n\,(\text{Alemania}) - t_m(\text{Alemania}) = 0.009 - 0.011 = -0.002.$$

Esta tasa negativa indica que el número de habitantes disminuye. Dado que Alemania cuenta con 82 millones de habitantes en el año 2002, entonces el país decrece ese año en 164 000 habitantes.

Población de México.

Crecimiento exponencial

Al calcular el crecimiento de un país al paso de los años hay que tener especial cuidado. Consideremos el caso de México. En el año 2000 había 100 millones de habitantes, lo que nos da 102 200 000 habitantes en el año 2001. ¿Cuántos habitantes hay el año 2002? No es correcto decir que la población aumenta en otros 2 200 000 habitantes, puesto que el crecimiento para el 2002 se debe calcular en función del número de habitantes del 2001, esto es,

$$\text{hab}_{2002} = \text{hab}_{2001} + t_c \times \text{hab}_{2001} =$$
$$102\,200\,000 + 0.022 \times 102\,200\,000 = 104\,448\,400.$$

Para el año 2003 seremos en México:

$$\text{hab}_{2003} = \text{hab}_{2002} + t_c \times \text{hab}_{2002} =$$
$$104\,448\,400 + 0.022 \times 104\,448\,400 = 106\,746\,264$$

Observemos que podemos calcular el número de habitantes en México en el año 2003 mediante el número de habitantes en el año 2001 o 2000 de la siguiente manera:

$$\text{hab}_{2002} = \text{hab}_{2001} + t_c \times \text{hab}_{2001} =$$
$$\text{hab}_{2000} + t_c \times \text{hab}_{2000} + t_c \times (\text{hab}_{2000} + t_c \times \text{hab}_{2000}) =$$
$$= \text{hab}_{2000} \times (1 + t_c)^2$$

y

$$\text{hab}_{2003} = \text{hab}_{2002} + t_c \times \text{hab}_{2002} =$$
$$\text{hab}_{2000} \times (1 + t_c)^2 + t_c \times \text{hab}_{2000} \times (1 + t_c)^2 =$$
$$= \text{hab}_{2000} \times (1 + t_c)(1 + t_c)^2 = \text{hab}_{2000} \times (1 + t_c)^3.$$

Podemos obtener la fórmula general para el año 2000 + n como

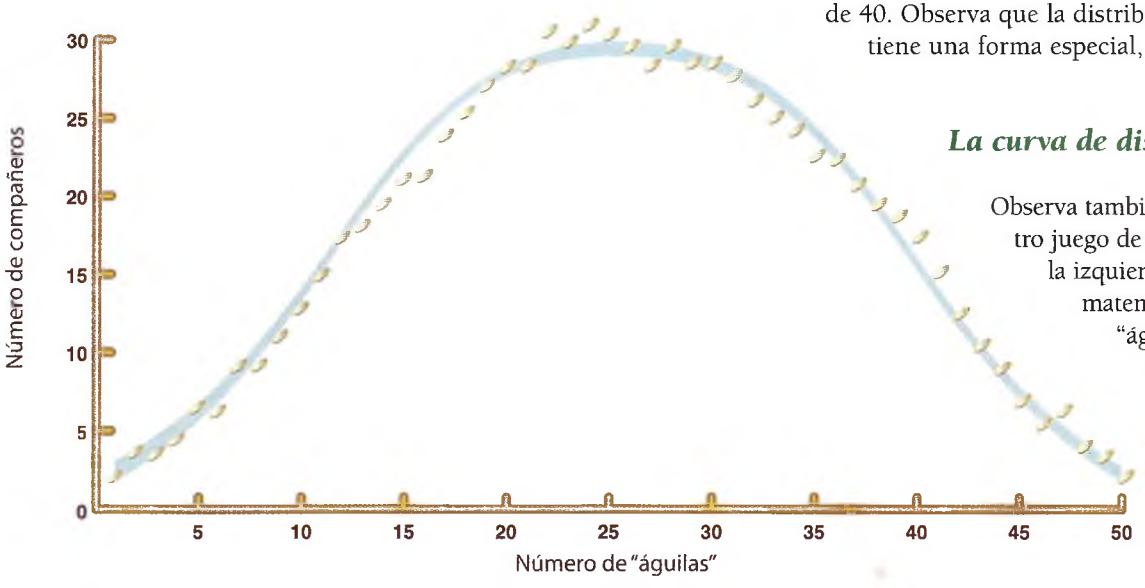
$$\text{hab}_{2000 + n} = \text{hab}_{2000} \times (1 + t_c)^n.$$

Esta fórmula se conoce como crecimiento exponencial. Por ejemplo, para el año 2020, si la tasa de crecimiento de México se mantiene constante en 0.022, seremos más de 150 millones de mexicanos, lo cual significa un incremento de más del 50 por ciento de la población en tan sólo 20 años.

DISTRIBUCIÓN DE LOS RESULTADOS

Si contamos la frecuencia con la que ocurre un fenómeno regido por el azar, descubriremos regularidades sorprendentes. Se dice que estos fenómenos tienen una distribución normal. Descubrimos estas regularidades no sólo jugando volados o tirando dados, también al medir la estatura o el peso de los compañeros de la clase, al medir el tamaño de las hojas de un árbol y al observar otros muchos fenómenos.

Hagamos el siguiente experimento: pidamos a cada compañero de la clase que tome una moneda y la arroje 50 veces y después nos reporte cuántas "águilas" obtuvo. Haz una gráfica que indique el número de compañeros que obtuvieron 1, 2, 3... hasta 50 "águilas". Probablemente tu gráfica se vea más o menos así:



La mayoría de tus compañeros obtuvieron cerca de 25 "águilas". Esto es fácil de explicar porque la probabilidad de obtener "águila" es del 50 por ciento. Como podíamos esperar, casi nadie obtuvo menos de 10 "águilas" o más de 40. Observa que la distribución de los puntos en la gráfica tiene una forma especial, como campana.

La curva de distribución normal

Observa también que la curva graficada en nuestro juego de volados se ve igual a la derecha y a la izquierda del 25. Esto tiene una razón matemática: la probabilidad de obtener 5 "águilas" en una serie de 50 volados es igual a la probabilidad de obtener 50 – 5 = 45. La probabilidad de obtener 10 "águilas" es igual a la probabilidad de obtener 50 – 10 = 40. ¿Por qué?

Podemos verlo de dos maneras diferentes. La complicada consiste en contar todas las posibilidades de obtener una cierta cantidad de "águilas". Por ejemplo, en el dibujo de abajo ilustramos algunos de los posibles resultados de arrojar una moneda al aire 5 veces. Podemos ver que el número de posibilidades de obtener 2 "águilas" es igual al número de posibilidades de obtener $5 - 2 = 3$.

Series de volados con 2 "águilas"

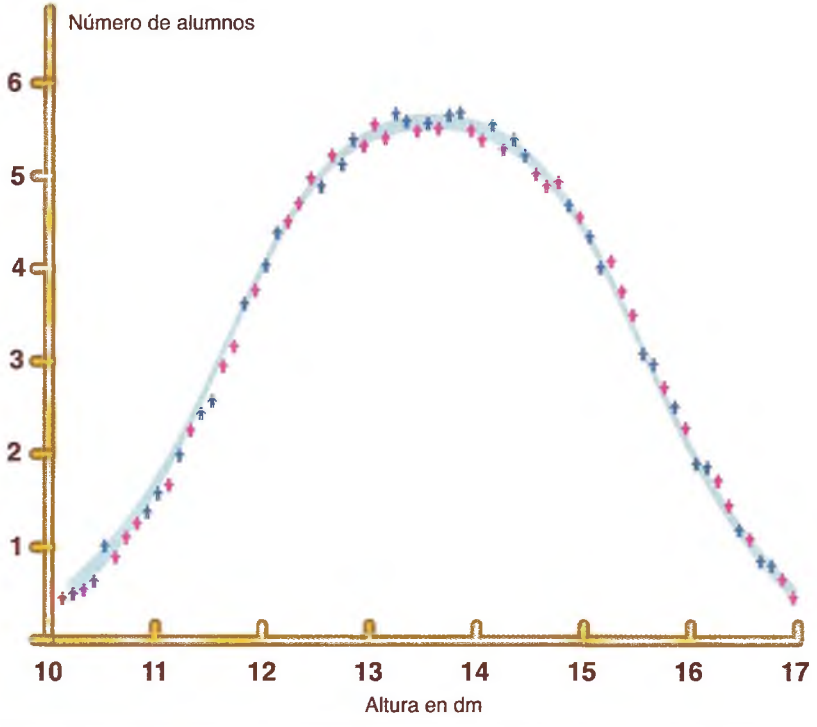
Series de volados con 3 "águilas"

¿Se te ocurre cuál es la manera sencilla de ver esta simetría de la gráfica sin contar?

La curva de distribución fue reconocida originalmente por el matemático francés Abraham de Moivre alrededor de 1700. Pero el estudio preciso de la curva fue realizado en el siglo XIX por Karl Gauss, uno de los matemáticos más importantes de la historia. A la curva de distribución también se le llama campana de Gauss.

La campana de Gauss aparece en muchas situaciones. Organicemos a los compañeros del salón para que consigan las estaturas de todos los alumnos de la escuela. Contemos primero cuántos alumnos tienen 10 decímetros de estatura (1 metro), 11 decímetros de estatura y así sucesivamente hasta 17 decímetros. Grafiquemos ahora los resultados. Probablemente el resultado se parece a la gráfica que dibujamos enseguida:

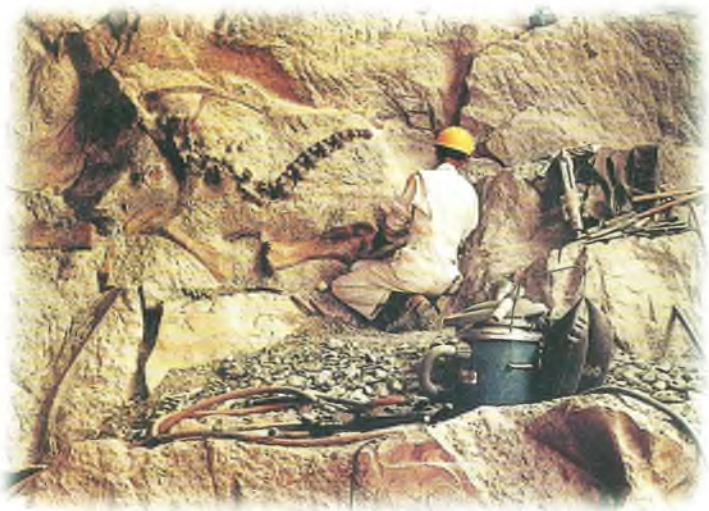
¡Otra vez la campana de Gauss! En realidad esto no es una coincidencia: la distribución de muchos fenómenos naturales es normal, lo cual quiere decir que al graficarla se dibuja una campana de Gauss.



Cómo medir la antigüedad de las cosas

Al realizar una excavación arqueológica se suelen descubrir restos de lo que fue la vida en el sitio: huesos de personas y animales, restos de comida, madera quemada y trastos, entre otras cosas. La primera pregunta que se hace el arqueólogo es: "¿qué antigüedad tienen estos restos?". El problema no es fácil, muchos métodos inexactos se usaron durante siglos. No fue sino hasta mediados del siglo XX que se encontró un método preciso para fechar la antigüedad.

El método conocido como fechamiento por carbono-14 fue desarrollado por el físico norteamericano Willard Libby en 1946. El método consiste en la medición precisa de un isótopo radiactivo del carbón en restos de materia orgánica; dicho isótopo va disminuyendo con el paso del tiempo de manera exponencial como veremos a continuación.



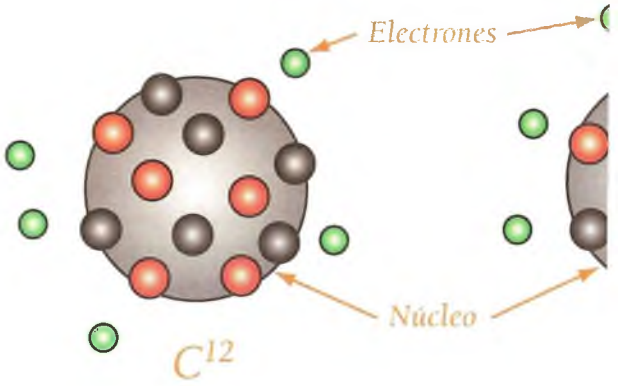
Excavación arqueológica.

¿Qué es un isótopo?

Los átomos están formados por un núcleo que contiene protones y neutrones; fuera del núcleo se encuentran los electrones. Los protones tienen carga eléctrica positiva, los electrones tienen carga negativa y los neutrones, como su nombre indica, son eléctricamente neutros. Los átomos de los elementos tienen el mismo número de protones, neutrones y electrones, de manera que son eléctricamente neutros.

El hidrógeno es el más sencillo de los elementos, pues sólo cuenta con un protón, un neutrón y un electrón. Sigue el helio con dos protones, dos neutrones y dos electrones. El carbón es el sexto elemento, ya que cuenta con seis protones, seis neutrones y seis electrones.

Un isótopo de un elemento cuenta con neutrones adicionales. El carbono-14 es el isótopo del carbón que contiene dos neutrones adicionales. También se denota como C^{14} .

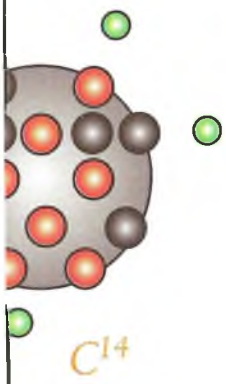


El isótopo C^{14} se forma en la atmósfera, es absorbido por las plantas verdes en la tierra y luego se transmite a los animales al comer dichas plantas. Pero sucede que los isótopos de carbono-14 no son estables: poco a poco se van transformando en otros átomos en un proceso llamado decaimiento radiactivo. Mientras el animal está vivo, la concentración del isótopo se mantiene constante, ya que el que pierde por el decaimiento radiactivo se recupera al comer plantas verdes; pero al morir, los restos del animal van perdiendo poco a poco su contenido de isótopo C^{14}, de manera que si medimos la cantidad de C^{14} presente en los restos podremos saber cuántos años tiene de haber muerto el animal.

¿Con qué velocidad se pierde el carbono-14 en los restos animales? Experimentalmente se ha visto que la cantidad del isótopo disminuye a la mitad por medio del decaimiento radiactivo en el transcurso de 5 730 años. Esta información es suficiente para calcular la antigüedad de los restos. En efecto, si llamamos C(0) a la cantidad de C^{14} presente en el organismo en el momento de morir y k a la tasa de decaimiento radiactivo del C^{14} en un año, entonces después de n años tendremos la cantidad C(n) de C^{14} en los restos, donde:

$$C(n) = C(0)\,(1 - k)^n\ .$$

Pirámide del Sol en Teotihuacan.



La información experimental con la que contamos es que si n = 5 730, entonces el cociente C(n)/C(0) = 1/2. Con la ayuda de una calculadora podemos obtener que k = 0.000012. Un número muy pequeño, pero que se convierte en significativo con el paso de los años.

El método de fechamiento por la medición de carbono-14 es el más efectivo encontrado hasta ahora. Gracias a él sabemos la antigüedad de culturas desaparecidas sin dejar crónicas escritas, como los teotihuacanos.

MATEMÁTICAS Y LOS JUEGOS

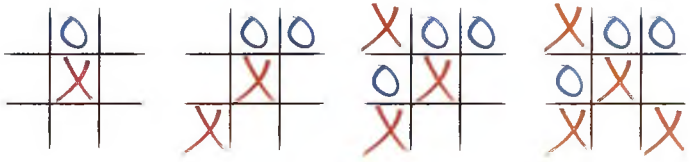
No todos los juegos dependen únicamente del azar. En juegos como el ajedrez, las damas chinas, el monopolio, los juegos de cartas y otros, los jugadores desarrollan una estrategia para intentar ganar a su rival. El estudio de las estrategias en los juegos es parte de una teoría matemática conocida como teoría de juegos, la cual tiene importantes aplicaciones en las ciencias sociales y la economía.

En algunos juegos se pueden desarrollar estrategias para ganar siempre, o bien para no perder. La mayoría de los juegos complicados, como el ajedrez, no tienen una estrategia ganadora, solamente hay unas jugadas que son mejores que otras y, a veces, esto es también difícil de decidir.

¿Qué es una estrategia?

Una estrategia en un juego nos indica cuáles son los pasos que se deben seguir en cualquier situación para llegar a algún resultado deseable. A veces la estrategia nos indicará cómo ganar; en otros casos, la estrategia consiste en saber cuál es la mejor jugada, aunque no sepamos cuál será el resultado del juego.

En el juego del gato existe una estrategia para que el jugador que comienza no pierda. ¿Cuál es?



Comienza el jugador con una × en el centro del tablero. Si observas bien, sólo hay dos maneras de contestar: colocar el 0 en uno de los cuadros extremos, o bien, poner el 0 en uno de los cuadros de en medio. Éstas son las dos situaciones que se ilustran enseguida:

Hemos indicado cómo debe proceder el jugador que inició para que la tirada del jugador 0 sea obligada. En el primer caso, si el jugador 0 no se equivoca, el juego se empata. En el segundo, no importa lo que haga 0, el jugador que comenzó gana.

La teoría de juegos y el estudio de estrategias es importante en la toma de decisiones. Para tener una idea de lo que esto significa consideremos una situación sencilla.

Juan y Pedro eligen una de las letras A o B, sin que el otro sepa qué eligió. Si ambos eligen A, entonces Juan le paga 2 pesos a Pedro; si ambos eligen B, entonces Juan le paga a Pedro 3 pesos. En caso de que Juan elija A y Pedro B, entonces Pedro le paga 1 peso a Juan. En el otro caso, no se pagan nada. ¿Qué deben elegir?

Pongámonos en los zapatos de Juan, quien puede pensar de la siguiente manera: "como no sé qué va a elegir Pedro, puedo suponer que elige A con 50 por ciento de probabilidades, o que elige B con las mismas probabilidades". Entonces, Juan calcula: "si elijo A, puedo esperar terminar con

$$-2 \times 0.5 + 1 \times 0.5 = -0.5$$

pesos, esto es, una pérdida de 50 centavos. En cambio si elijo B, puedo esperar terminar con

$$0 \times 0.5 + (-3 \times 0.5) = -1.5$$

pesos, esto es, con una pérdida de 1.5 pesos. Por tanto juego A".

Si Pedro sigue la misma estrategia, entonces debería jugar B (¿por qué?), pero en ese caso, terminará perdiendo 1 peso. Vemos entonces, que las estrategias no siempre indican la manera de ganar, pero ayudan a tomar decisiones racionales.

Sir Arthur Conan Doyle.

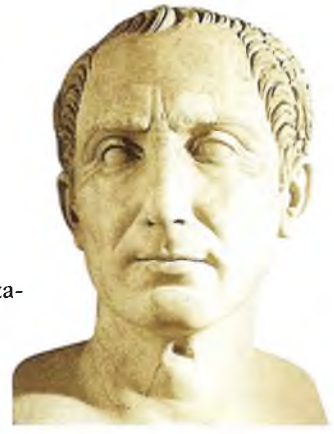
El Profesor Moriarty persigue a Sherlock Holmes

En el libro *El problema final* de Arthur Conan Doyle, el enemigo de Sherlock Holmes, Moriarty, lo persigue hasta la estación de trenes. Holmes y su enemigo toman trenes consecutivos hacia Francia. Hay dos paradas: Canterbury y Dover. Si los dos bajan en la misma estación, Moriarty logrará matar a Holmes. Si Holmes sigue a Dover y Moriarty baja en Canterbury, Holmes estará seguro en Francia y se habrá salvado por lo pronto. Si Holmes baja en Dover y Moriarty también, la cacería continuará todavía (en este caso podemos considerar que se da un empate). ¿Qué debe hacer Sherlock Holmes? Busca el libro de Conan Doyle e investiga qué hizo Holmes para salvarse.

MENSAJES SECRETOS

La criptografía es la ciencia de las comunicaciones secretas. El problema de escribir con claves secretas consiste en trasmitir el mensaje de manera que sólo el destinatario pueda entender el contenido, a pesar de que todo el mundo pueda leerlo. Cuando transformamos un mensaje de manera que sólo puede ser entendido por el destinatario, decimos que el mensaje ha sido codificado y que el destinatario conoce la clave de decodificación.

Todos hemos jugado a enviar "mensajes secretos" escribiendo unas letras por otras, de manera que sólo el amigo al que destinamos el mensaje sepa cuál es el cambio de letras que utilizamos. Éste es el mismo método que utilizaban los emperadores romanos.



Los mensajes de Julio César

El emperador romano Julio César utilizaba un desplazamiento cíclico de las letras del alfabeto para cifrar sus mensajes. De esta forma la A se escribía como D y la B como E. La tabla completa de transformaciones en nuestro alfabeto sería la siguiente:

Letra: A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
Codificada: D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C

Cuando aparecen este tipo de transformaciones, se dice que hay una transposición. Si decidimos que los espacios en blanco se escriben como A, descifra el siguiente mensaje escrito en el código de Julio César.

HOASUREOHPDAHVAWUDVPLWLUADAXQAGHVWLQDWDULRAGHAPDQHUDA.

Si no conocemos la clave de cifrado del mensaje, es muy difícil traducirlo. Puede ayudar saber que en un idioma la frecuencia con que las diferentes letras aparecen no es la misma. En español, la letra E es la más usada, y como bien sabemos, no hay muchas palabras con la letra W. La frecuencia de los caracteres (letras o signos) más usados en español es la siguiente:

Letra	Frecuencia
Espacio	0.172
E	0.137
A	0.107
S	0.074
O	0.070

Al paso de los años quedó claro que la codificación de mensajes largos en la forma en que lo hacían los romanos era fácil de ser descubierta. Por ello se comenzaron a utilizar claves de codificación más y más complejas. Sin embargo, a lo largo de la historia han existido varios analistas que han logrado romper los códigos secretos del enemigo.

Espionaje en México

Durante la Primera Guerra Mundial los británicos interceptaron un mensaje cifrado del ministro de Relaciones Exteriores de Alemania dirigido al embajador en México, Heinrich von Eckardt. Los analistas lograron romper el código del mensaje y descubrir un plan alemán de alentar al gobierno de México a entrar en la guerra como aliado de Alemania asegurándole que, al triunfo, recuperaría los territorios perdidos en la guerra contra Estados Unidos de América en 1847.

Una manera eficiente de codificar mensajes es la siguiente. Establecemos una correspondencia de las letras con los números así:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

Podemos asociar el espacio con el número 0.
Por ejemplo, el mensaje:

CODIFICA ESTE MENSAJE

se transforma en la lista de números

3 15 4 9 6 9 3 1 0 5 19 20 5 0 13 5 14 19 1 10 5

Ahora elijamos una matriz 2×2, esto es, un arreglo de números de la forma

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Dividamos nuestra lista de números en parejas consecutivas (3, 15), (4, 9), (6, 9) hasta llegar a (10, 5). Transformemos ahora la pareja (x, y) en la pareja (u, v) haciendo las operaciones:

$$u = ax + by$$
$$v = cx + dy.$$

El mensaje que enviamos es el de las parejas de números transformados. Por ejemplo, si

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

tenemos entonces que las parejas transformadas por medio de la matriz son:

51 84 35 50 39 63 9 14 15 25 98 157
10 15 41 65 85 137 32 53 10 15.

Éste será el mensaje que enviemos. ¿Cómo descifrarlo? Procedemos exactamente como antes, pero ahora, utilizando la matriz

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Por ejemplo, de la pareja (51, 84) transformada por esta matriz se obtiene la pareja (3, 15), que corresponde a las letras CO con las que comienza el mensaje. ¡Termina de descifrar el mensaje y comprueba que ésta es una excelente manera de codificar!

Esto no es magia, hemos elegido un par de matrices que tienen profundas relaciones entre sí. Se dice que

$$\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ es inversa de } \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Las matemáticas en la computación

Desde la más remota antigüedad los hombres buscaron crear máquinas para realizar las operaciones aritméticas de manera eficiente y rápida. Tal vez el mecanismo más eficaz conocido antes de nuestra era fue el ábaco. En el siglo XVII fueron inventadas las primeras máquinas para sumar y restar. Pero la gran revolución se dio en el siglo XX con la invención de la computadora. Los conceptos de funcionamiento y programación de las computadoras son, sin duda, una de las aplicaciones más apasionantes de las matemáticas.

Hasta hace unos 30 años eran frecuentes los torneos aritméticos en que se enfrentaban personas que manejaban el ábaco hábilmente contra personas con computadoras electrónicas. En la actualidad las computadoras electrónicas realizan millones de operaciones aritméticas por segundo y sus circuitos electrónicos cada vez ocupan un espacio más reducido.

Adelantado a su época

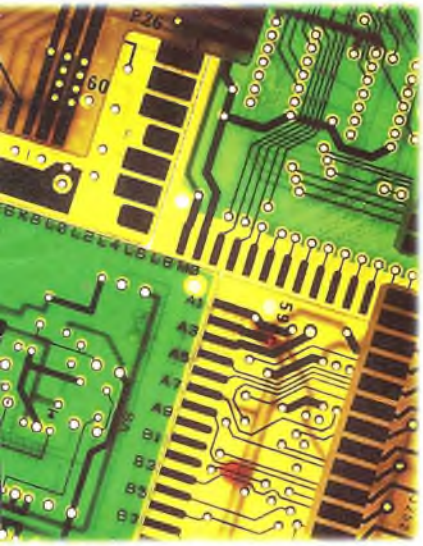
Alrededor de 1830, el inventor inglés Charles Babbage diseñó la primera máquina programable, conocida como el ingenio analítico, la cual fue precursora de las modernas computadoras digitales. Para el diseño de esta máquina Babbage introdujo la idea de utilizar tarjetas perforadas, que es como funcionaban los telares mecanizados ingleses. También tuvo la idea de crear lenguajes de programación, similares a los lenguajes que se utilizan hoy para programar las computadoras.

Charles Babbage.

Sin embargo, el ingenio analítico nunca pudo operar, pues se requería la fabricación de un gran número de piezas muy delicadas, más allá de las posibilidades de la ingeniería de la época.

La primera computadora electrónica, ENIAC, comenzó a funcionar en 1946 en la Universidad de Princeton en Estados Unidos de América. Esta computadora pesaba 27 toneladas y tenía más de 20 000 bulbos, pero no era más rápida que una calculadora de bolsillo de nuestros días. El grupo que trabajó en el diseño de ENIAC estuvo a cargo del matemático de origen húngaro John von Neumann, a quien también se deben los primeros resultados en la teoría de juegos.

Un sistema de conteo para computadoras electrónicas



Nuestro sistema de numeración decimal es un sistema posicional, es decir, las cifras que forman el número tienen diferente valor dependiendo del lugar que ocupan en el número. Así, el número 132 significa 1 centena, más 3 decenas, más 2 unidades:

$$132 = 100 + 30 + 2 = 1 \times 10^2 + 3 \times 10^1 + 2 \times 10^0.$$

En el sistema posicional de base 2 o sistema binario, las cifras son sólo el 0 y el 1 y la posición de las cifras representa potencias de 2. Así, el número 1001101 del sistema binario representa el 77 del sistema decimal:

$$1001101$$
$$=$$
$$1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$
$$=$$
$$64 + 8 + 4 + 1 = 77$$

También se puede escribir cualquier número de base decimal en base binaria. Los primeros números se escriben así:

Base decimal	Base binaria
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000
9	1001
10	1010

El sistema binario que se utiliza en las computadoras es claro. Podemos pensar en una hilera de focos prendidos o apagados. Si un foco está apagado indica que el dígito correspondiente es 0 y si está prendido, el dígito correspondiente es 1. Así el número 77 se puede escribir como la siguiente fila de focos:

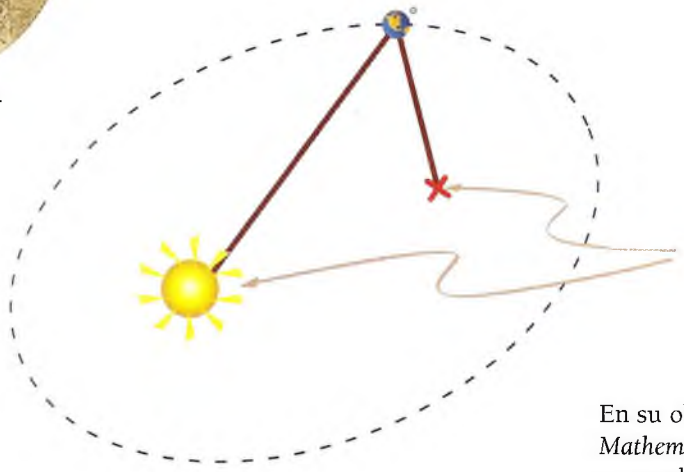
A partir de mediados del siglo XX, el acelerado desarrollo en la tecnología de las computadoras ha tenido una gran repercusión en el mundo y ha modificado nuestra manera de vivir. Las computadoras controlan los semáforos, el tránsito de aviones, las fábricas de automóviles, los sistemas de comunicación, etcétera. En casi todas las oficinas, así como en muchos hogares y escuelas se usan computadoras personales. Pero en el fondo, todas las computadoras son iguales: son máquinas que realizan operaciones aritméticas a velocidades extraordinarias.

Matemáticas en la ciencia

Los científicos que estudian los fenómenos de la naturaleza, como los físicos, los químicos y los biólogos, intentan no sólo describir los fenómenos que estudian, sino predecir lo que sucederá en situaciones futuras. Para ello, crean modelos matemáticos de la naturaleza, pues las matemáticas ofrecen los métodos y la precisión necesarios para obtener resultados confiables. Tal vez el modelo matemático más aclamado de la historia es el de la Gravitación Universal de Newton.

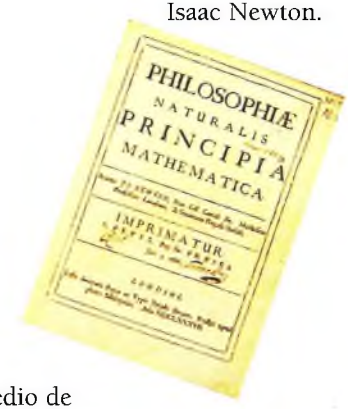
Johannes Kepler.

Durante milenios los hombres habían observado las estrellas en la noche y el movimiento de los planetas. Asimismo, los astrónomos habían construido telescopios para observar los cielos y acumulado cuidadosas observaciones acerca del movimiento de los astros. Fue el astrónomo austriaco Kepler en el siglo XVII quien logró condensar en algunas pocas expresiones las observaciones de muchos astrónomos. Tal vez la principal observación de Kepler es que los planetas se mueven alrededor del Sol en órbitas elípticas, ocupando el Sol uno de los focos.



Focos de la elipse

Principia Mathematica de Isaac Newton.



En su obra maestra, los *Principia Mathematica*, Newton explicó, por medio de un modelo matemático, cómo las mismas leyes regían la caída de una manzana en la superficie de la Tierra, el movimiento de los planetas alrededor del Sol, las fases de la Luna y las mareas de los océanos.

Gauss y los asteroides

En 1801 el astrónomo italiano Joseph Piazzi vio accidentalmente el primer asteroide, también llamado entonces planeta menor. A los pocos días, este asteroide, conocido actualmente como Ceres, dejó de ser visto en los telescopios de los astrónomos. Los dos acontecimientos conmocionaron a los intelectuales europeos: la aparición de un nuevo planeta y su repentina desaparición. Los astrónomos no podían encontrarlo de nuevo.

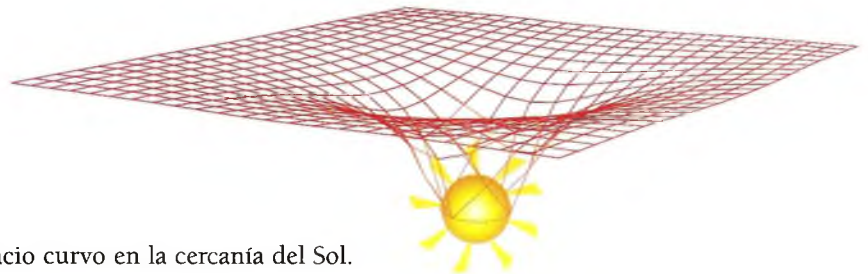
Cinturón de asteroides.

Con los pocos datos que se conocían de la trayectoria del asteroide, usando las leyes de gravitación de Newton y realizando tediosos cálculos, Karl Friedrich Gauss predijo la órbita completa del asteroide. Tiempo después, el pequeño planeta apareció del otro lado del Sol, en el momento y lugar que Gauss había predicho. Este éxito matemático trajo gran fama y reconocimiento a Gauss.

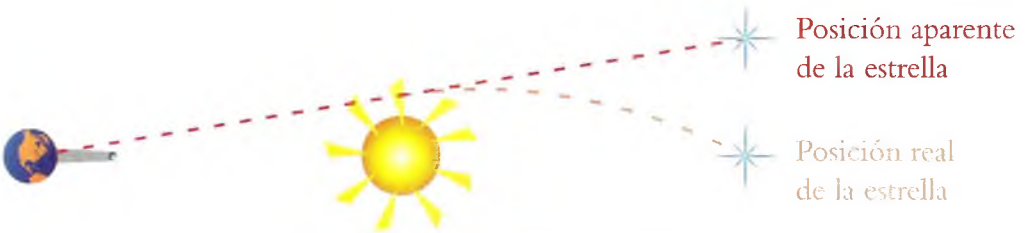
A principios del siglo XX, el físico y matemático alemán Albert Einstein descubrió que el modelo de gravitación de Newton tenía limitaciones y por ello no predecía con exactitud todos los movimientos de los cuerpos en el espacio.

Albert Einstein.

Einstein utilizó la teoría de superficies desarrollada por el matemático Riemann, discípulo de Gauss, para explicar la curvatura del espacio en presencia de cuerpos masivos. Esta teoría General de la Relatividad predecía que la luz cambiaría su trayectoria al pasar cerca de cuerpos de gran masa como el Sol. Este fenómeno fue verificado observando la posición aparente de las estrellas durante un eclipse de Sol. La comprobación de este fenómeno fue uno de los éxitos que hicieron universalmente reconocido a Einstein.



Espacio curvo en la cercanía del Sol.



Posición real y aparente de estrellas durante un eclipse solar.

Al tratar de explicar cuestiones difíciles acerca del espacio, la materia, los átomos y los planetas, los científicos siempre han encontrado un apoyo en las matemáticas. En muchas ocasiones las matemáticas utilizadas no han sido desarrolladas con el afán de sus aplicaciones, sino por la más pura curiosidad de los matemáticos. Sin embargo, con bastante frecuencia, las matemáticas resultan útiles para entender la naturaleza.

Las matemáticas en México

Hay importantes vestigios del desarrollo de las matemáticas en el México prehispánico. Los mayas, los zapotecas y los aztecas desarrollaron sistemas de numeración y complejos calendarios basados en precisas mediciones astronómicas. En tiempos de la colonia se dieron cátedras de matemáticas en la Real y Pontificia Universidad de México. En tiempos modernos, las matemáticas se han ido desarrollando poco a poco hasta contar hoy con varias instituciones de prestigio.

Las matemáticas prehispánicas, sobre todo las desarrolladas en el mundo maya, han sido objeto de cuidadosos estudios y, sin duda, tú conoces algunos de los principales aspectos de ellas. Menos conocidas son las matemáticas desarrolladas en México en tiempos de la colonia y posteriormente en el México independiente.

Real y Pontificia Universidad de México.

Carlos de Sigüenza y Góngora.

La cátedra de Astrología y Matemáticas

En la cátedra de Astrología y Matemáticas inaugurada en 1637 en la Escuela de Medicina de la Real y Pontificia Universidad de México, fray Diego Rodríguez expuso las matemáticas del renacimiento italiano y las teorías astronómicas de Copérnico, Kepler y Galileo. Cabe observar que en ese tiempo, a la astrología se le daba el estatus de ciencia y que incluso sabios europeos como Kepler elaboraban horóscopos para príncipes y potentados.

Probablemente el intelectual novohispano más influyente en el siglo XVII fue don Carlos de Sigüenza y Góngora, quien compartió el gusto por la poesía y los problemas científicos con Sor Juana Inés de la Cruz. Don Carlos de Sigüenza fue un científico a la altura de los europeos. En 1680 calculó la órbita de un cometa visto en la Ciudad de México y demostró que estaba más allá de la Luna y que seguía una órbita circular alrededor del Sol, contradiciendo las voces alarmistas que situaban el cometa en la proximidad de la Tierra. Don Carlos ocupó en 1672 la cátedra de Astrología y Matemáticas que dejó vacante fray Diego Rodríguez.

La matemática moderna se inicia en México en los años 30 del siglo XX. Entonces un grupo de entusiastas, entre los que destacan Ricardo Monjes López, Sotero Prieto y Alfonso Nápoles Gándara, realiza seminarios sobre asuntos de actualidad matemática en la Escuela de Ingeniería de la UNAM. En 1935 se crea el Departamento de Ciencias Físico-Matemáticas donde fue posible abrir la carrera de matemáticas. En el año 1942 se funda el Instituto de Matemáticas de la UNAM.

Desde entonces varios centros de investigación matemática han sido creados. En más de 30 universidades del país existen carreras de matemáticas y en algunas también posgrados. Aunque en México se realiza investigación matemática de nivel mundial, el número de matemáticos es todavía pequeño. Queda mucho por hacer en nuestro país en cuanto al desarrollo de las ciencias y las matemáticas.

Los inicios de la computación en México

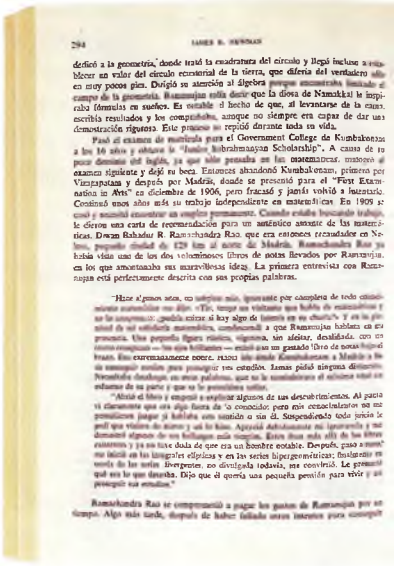
La computación científica se inicia en México con la llegada de la computadora IBM-650 a la Universidad Nacional en 1958. La computadora se instaló en el Centro de Cálculo, en el cual se dio apoyo a una serie de proyectos académicos y trabajos para organismos estatales y privados como PEMEX y la CFE. Al año siguiente llegan varias máquinas más que se instalan en dependencias del gobierno.

Actualmente, México cuenta con algunas supercomputadoras y gran cantidad de equipo mediano y microcomputadoras. A lo largo de todo el país hay programas de licenciatura en computación, algunos de ellos de gran calidad, así como algunos programas de posgrado.

A pesar de este desarrollo, México tiene todavía pocos expertos en computación. Este campo de la ciencia tiene un gran futuro en el país.

¿Para qué me sirven las matemáticas?

Hemos visto en este libro algunas aplicaciones de las matemáticas: la realización de mapas, el reporte de datos en tablas y gráficas, el análisis de la información por medio de la estadística, la comprensión de fenómenos regidos por el azar y la aplicación de las matemáticas tanto en la computación como en las ciencias. En realidad, las matemáticas aparecen en todas partes y nosotros podemos hacer uso de ellas para entender mejor el mundo y sacar provecho de las ideas y valores matemáticos.



Las matemáticas son una poderosa arma para la comprensión y la solución de problemas y nos ofrecen la posibilidad de comprender mejor el mundo que nos rodea. Las matemáticas han jugado también un papel importante en el desarrollo del arte y en los últimos años en el desarrollo de las ciencias sociales y la economía.

Las matemáticas y el arte

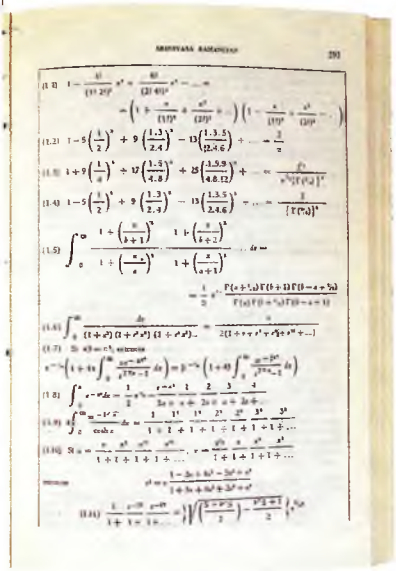
Las matemáticas no sólo nos sirven para resolver problemas aritméticos y entender mejor los fenómenos naturales. También son importantes en el desarrollo y comprensión de conceptos artísticos.

Natividad de Alberto Durero.

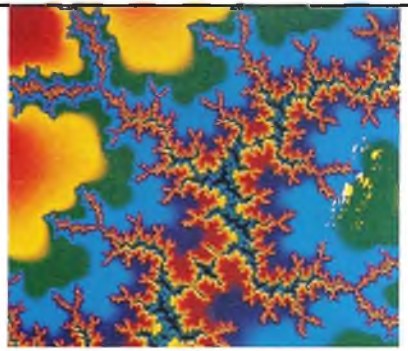
Probablemente el ejemplo mejor conocido es el de los pintores del Renacimiento, como Piero della Francesca en Italia y Alberto Durero en Alemania, quienes se dan cuenta del importante papel que juega la geometría para alcanzar una representación realista de los objetos y paisajes que desean plasmar en sus cuadros. Estos pintores desarrollaron múltiples métodos para lograr representaciones fieles a la realidad. Pero no es sino a principios del siglo XIX que los matemáticos consiguen formalizar muchas de las ideas desarrolladas por los artistas del Renacimiento.

Las señoritas de Aviñón de Pablo Picasso

A principios del siglo XX, las discusiones sobre la geometría no-euclidiana, la geometría elíptica y el espacio-tiempo de Einstein habían llegado a las reuniones de poetas, artistas y políticos. La curiosidad acerca de los nuevos mundos que la geometría abría se expresó en el surgimiento de nuevas corrientes como el cubismo.



A finales del siglo XX, surge una nueva vertiente artística que consiste en utilizar las computadoras para generar imágenes sofisticadas de objetos matemáticos como los fractales. Estas imágenes fusionan el arte con las matemáticas y la computación.



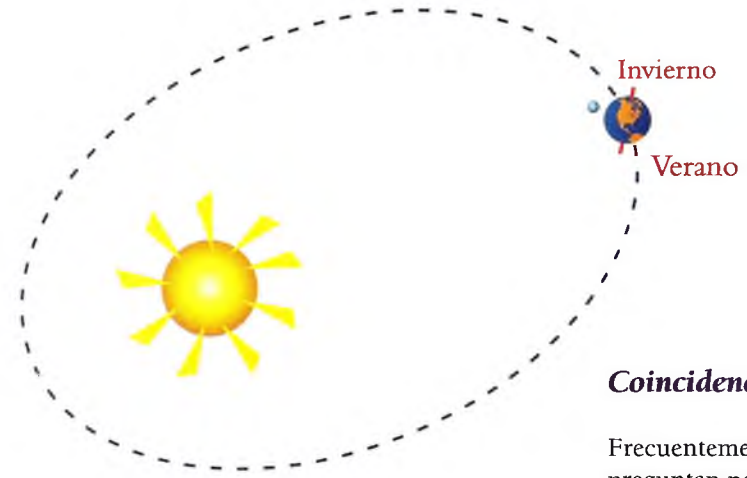
Fractal generado por computadora.

Probablemente el mayor valor del aprendizaje de las matemáticas es el desarrollo del pensamiento lógico y ordenado. Si podemos plantear correctamente un problema matemático, analizarlo y encontrar su solución, ¿por qué no podremos hacerlo con otros problemas de la vida cotidiana? El entrenamiento del pensamiento crítico y ordenado será una herramienta útil a lo largo de la vida.

Visto en la televisión

Un locutor de televisión explica: "la Tierra gira alrededor del Sol en una órbita elíptica y el Sol está en uno de los focos. Cuando la Tierra está más cerca del Sol es verano y cuando está más alejada es invierno".

¿Es esta una explicación correcta? Recuerda que cuando es verano en el hemisferio norte de la Tierra, es invierno en el sur.



Coincidencias zodiacales

Frecuentemente encontramos personas que nos preguntan por nuestro signo del Zodiaco y luego nos dicen: "¡Qué coincidencia! Yo también soy Leo". ¿Qué le explicarías a esta persona? ¿Es realmente una gran coincidencia?

Cuando le preguntaron a un matemático que por qué no creía en la astrología contestó: "Porque soy géminis y los géminis no creen en astrología".

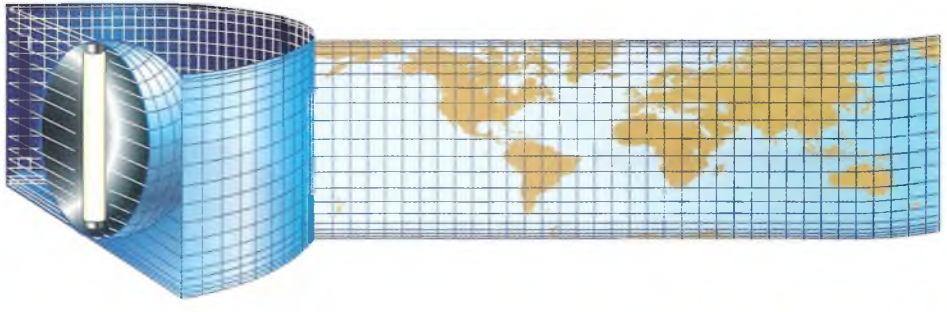
Grandes matemáticos

Eratóstenes de Cirene (276-194 a. de n.e.). Científico griego; fue el primero en medir el meridiano terrestre con extraordinaria exactitud, así como la distancia de la Tierra a la Luna y el Sol.

Gerardus Mercator (1512-1594). Matemático y geógrafo flamenco que construyó un mapa del mundo utilizando la proyección geográfica cilíndrica que lleva su nombre. Aplicó por primera vez el nombre de "atlas" a una colección de mapas.

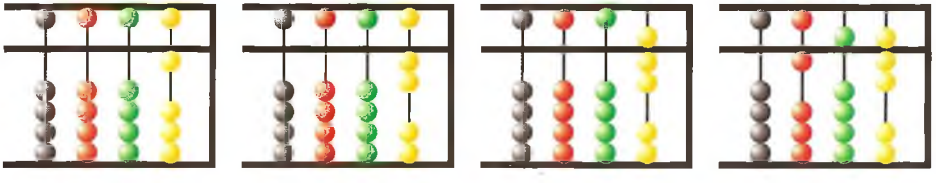
John Napier (1550-1617). Matemático escocés, considerado el inventor de los logaritmos y de varias reglas y fórmulas de trigonometría esférica.

Galileo Galilei (1564-1642). Astrónomo y físico italiano que descubrió el isocronismo de las oscilaciones pendulares. Es considerado uno de los fundadores del método científico moderno.

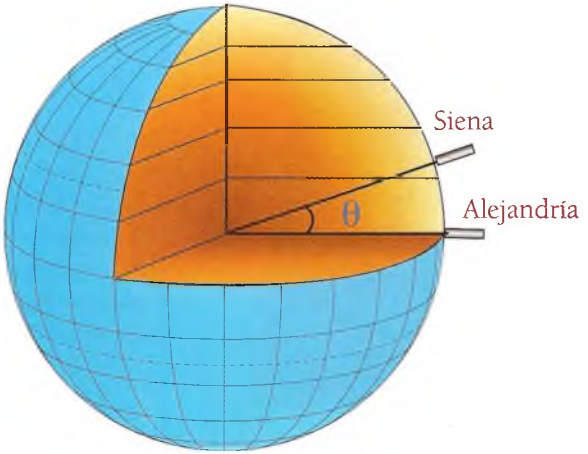


René Descartes (1596-1650). Filósofo francés fundador del racionalismo, creador también de la geometría analítica.

Blaise Pascal (1623-1662). Científico y filósofo francés, dedicado a la geometría, así como a la teoría de las combinaciones y el cálculo de probabilidades.



Isaac Newton (1642-1727). Matemático, físico, astrónomo y filósofo inglés que descubrió el cálculo diferencial e integral y generalizó la fórmula del binomio demostrando que era aplicable para cualquier exponente. Demostró matemáticamente que el curso de los planetas alrededor del Sol se explica admitiendo la atracción mutua entre los astros (ley de la gravitación universal).



Pierre Simon Laplace (1749-1827). Astrónomo, físico y matemático francés que aportó muchos avances al cálculo de probabilidades.

Karl F. Gauss (1777-1855). Matemático, físico y astrónomo alemán que desarrolló el campo de los números complejos. Descubrió los números primos llamados gaussianos; calculó la órbita de Ceres y realizó importantes avances en cálculo numérico y estadística, como "la curva en campana" o "distribución de Gauss".

Charles Babbage (1792-1871). Matemático británico que construyó una calculadora mecánica que utilizaba la teoría matemática de las diferencias finitas; en 1834 diseñó la máquina analítica, programada por medio de tarjetas.

Bernhard Riemann (1826-1866). Matemático alemán que ideó una nueva forma de integración y aplicó la geometría al cálculo de funciones de variable compleja. Fue uno de los iniciadores de la geometría no-euclidiana.

John von Neumann (1903-1957). Matemático estadounidense de origen húngaro que realizó aportaciones a la mecánica cuántica, termodinámica, teoría de operadores funcionales, teoría de los grupos, topología, cibernética, etcétera.

Índice analítico

a

ábaco 7, 52
aceleración 14, 18
Alejandría 10
ángulos 10, 11
azar 28, 30, 32, 36, 40-41, 44, 48, 58
aztecas 56

bc

Babbage, Charles 52, 60-61
Babilonia 7
brújula 11
calculadoras 7, 37
campana de Gauss 44, 45
carbono-14 46-47
Casino de Monte Carlo 40-41
censo 26
Ceres 55
CFE 57
código 50-51
Colón, Cristóbal 11
computadoras 7, 52-53, 57-58
Conan Doyle, sir Arthur 49
coordenadas 8-9
crecimiento exponencial 43
crecimiento lineal 21
criptografía 50
Cruz, sor Juana Inés de la 56

d

decaimiento radiactivo 47
Delaistre 30
Descartes, René 8, 60-61
Discurso del Método 8
distancia 14-15
distancia, entre dos puntos 8-9
Durero, Alberto 12, 58

e

Einstein, Albert 55
Elcano, Sebastián 11
electrones 46
ENIAC 52
Eratóstenes 10-11, 60-61
escala 8-9
Escuela de Ingeniería (UNAM) 57
estadística 7, 26, 42
estrategia 48-49

f

fenicios 10
fractales 59
Francesca, Piero della 12, 58
frecuencia 44, 50
fuerza 14-15

g

Galilei, Galileo 24, 60-61
Gama, Vasco da 11
Gauss, Karl 45, 55, 60-61
Greenwich, meridiano de 11
griegos 10
Guía Roji 9

hij

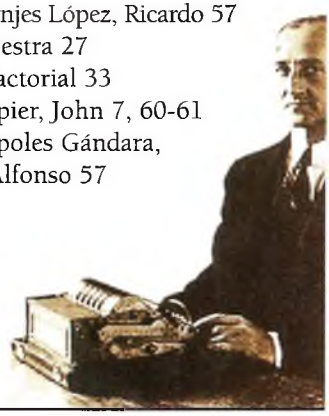
Harrison, John 11
INEGI 26
isótopo 46-47
Julio César 50

kl

Kepler, Johannes 54
Kolmogorov 30
Laplace 30-31, 36, 38, 60-61
Las señoritas de Aviñón 58
latitud 11
ley de los grandes números 29
leyes del movimiento 14, 54
Libby, Willard 46
longitud 11

mn

mapa 7-13, 23, 58
mapamundi 13
mayas 56
Mercator 13, 60-61
meridianos 11
Moivre, Abraham de 45
Monjes López, Ricardo 57
muestra 27
n factorial 33
Napier, John 7, 60-61
Nápoles Gándara, Alfonso 57



Natividad 12
neutrones 46
Newton, Isaac 14, 54, 60-61
números 6
números arábigos 6-7

p

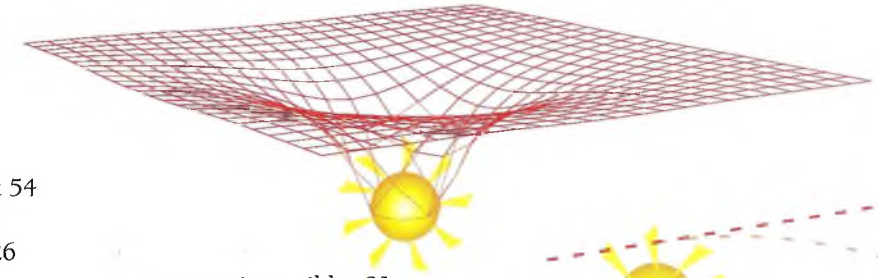
paralelos 11
Pascal, Blaise 7, 36-37, 60-61
PEMEX 57
perspectiva 12
Piazzi, Joseph 55
Picasso, Pablo 58
plano cartesiano 8
plano coordenado 8-9
planos 8
Prieto, Sotero 57
Principia Mathematica 54
probabilidad 7, 28-39
promedio 16-20, 22-26
protones 46
proyección 12-13
punto de fuga 12

r

relatividad general 55
reloj 6, 11
Renacimiento 12, 58
Riemann 55, 60-61
Rodríguez, fray Diego 56

s

sextante 11
Siena 10
Sigüenza y Góngora, Carlos de 56
sistema binario 53
sucesos complementarios 31



sucesos imposibles 31
sucesos independientes 31, 36-37
sucesos seguros 31,34

t

tasa de crecimiento 42-43
tasa de mortandad 42-43
tasa de natalidad 42-43
temperatura 22-23
teoría de juegos 48
teotihuacanos 47
tiempo 14-15
Tierra 10-13
trigonometría 10,13

v

velocidad 14, 19, 53
velocidad media 15

velocímetro 14, 18
Vespucio, Américo 11
Vinci, Leonardo da 24
Von Neumann, John 52, 60-61

wz

Wright, Edward 13
zapotecas 56
zodiaco 59

9 789701 898574

HACIA UN PAÍS DE LECTORES

Matemáticas y la vida cotidiana muestra las aplicaciones de las matemáticas en nuestros actos diarios, explica la teoría de la probabilidad con ejemplos divertidos y aplicaciones a los juegos de dados e invita al lector a descubrir todo lo que las matemáticas rigen y cómo, para la ciencia, constituyen un lenguaje inigualable.

José Antonio de la Peña, doctor en Ciencias matemáticas por la UNAM, ha publicado más de 90 artículos de investigación y cuatro libros de texto. Fue presidente de la Sociedad Matemática Mexicana, director del Instituto de Matemáticas de la UNAM y presidente de la Academia Mexicana de Ciencias. Recibió la distinción Universidad Nacional 1989 y el Premio de la Investigación Científica 1994.

programa nacional de lectura

Santillana

SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA | SEP

COMISIÓN NACIONAL DE LIBROS DE TEXTO GRATUITOS